

SMG-1300 Sähkömagneettiset kentät ja aallot I

Tentti 29.01.2007

Lauri Kettunen

1. Selitä mahdollisimman tarkasti, mitä käsitteet *jännite* ja *sähkövuo* tarkoittavat?
2. Miten saat määritettyä levykondensaattorin *kapasitanssin*, jos tunnet sähkökentän voimakkuuden E kaikkialla levyjen ulkopuolella?
3. Magneettista dipolia käytetään atomien ja molekyylien magneettisena mallina. Perustele, onko periaatteessa mahdollista, että kahdella tai useammalla atomilla tai molekyylillä olisi sama magneettinen dipolimomentti.
4. Minkälaisella teknisellä ratkaisulla voidaan toteuttaa
 - a) staattiselta sähkökentältä,
 - b) staattiselta magneettikentältä,suojattu huone/tila? Perustele vastauksesi.
5. Staattinen magneettikenttä toteuttaa yhtälöt $\text{div} \mathbf{B} = 0$, $\text{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J}$, rajapintaehdot, sekä väliaine yhtälön $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Miksi magneettikenttää ei voida määrittellä, jos väliaine yhtälöä ei ole annettu?



Vektoriangebran taulukot kääntöpuolella

Vektorianalyysin kaavoja

$$A \times A = 0 \quad (1)$$

$$A \cdot (A \times B) = 0 \quad (2)$$

$$A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C \quad (3)$$

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (4)$$

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (5)$$

$$\nabla(a\phi + b\psi) = a\nabla\phi + b\nabla\psi \quad (6)$$

$$\nabla \cdot (aF + bG) = a\nabla \cdot F + b\nabla \cdot G \quad (7)$$

$$\nabla \times (aF + bG) = a\nabla \times F + b\nabla \times G \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi \quad (9)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0 \quad (10)$$

$$\nabla \times \nabla\phi = 0 \quad (11)$$

$$\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F \quad (12)$$

$$\nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi \quad (13)$$

$$\nabla(F \cdot G) = (F \cdot \nabla)G + F \times (\nabla \times G) + (G \cdot \nabla)F + G \times (\nabla \times F) \quad (14)$$

$$\nabla \cdot (\phi F) = (\nabla\phi) \cdot F + \phi\nabla \cdot F \quad (15)$$

$$\nabla \times (\phi F) = (\nabla\phi) \times F + \phi\nabla \times F \quad (16)$$

$$\nabla \cdot (F \times G) = -F \cdot (\nabla \times G) + G \cdot (\nabla \times F) \quad (17)$$

$$\nabla \times (F \times G) = F(\nabla \cdot G) - (F \cdot \nabla)G - G(\nabla \cdot F) + (G \cdot \nabla)F \quad (18)$$

$$\nabla \cdot r = 3 \quad (19)$$

$$\nabla \times r = 0 \quad (20)$$

$$\nabla\phi(r) = \frac{r}{r} \frac{d\phi}{dr} \quad (21)$$

$$\nabla \cdot F(r) = \frac{r}{r} \cdot \frac{dF}{dr} \quad (22)$$

$$\nabla \times [r\phi(r)] = 0 \quad (23)$$

$$\nabla'\phi(r - r') = -\nabla\phi(r - r') \quad (24)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \nabla\phi \cdot dl = \phi(r_2) - \phi(r_1) \quad (25)$$

$$\int_S \nabla \times F \cdot nda = \oint_C F \cdot dl \quad (26)$$

$$\int_V \nabla \times F dv = - \oint_S F \times nda \quad (27)$$

$$\int_V \nabla \cdot F dv = \oint_S F \cdot nda \quad (28)$$

Kaavoissa a ja b ovat skalaarivakioita, A , B ja C vakiovektoreita, ϕ ja ψ skalaarikenttiä ja F ja G vektorikenttiä. r ja r' ovat paikkavektorikenttiä ja $r = |r|$.

1. Mitä *sähkövirta* I tarkoittaa?
2. Miten pistemäisen varauksen aiheuttama *sähkökentän voimakkuus* E johdetaan Coulombin kokeen havainnoista?
3. Sähkövuon tiheys D toteuttaa *Gaussin lain*

$$\int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \rho dv \quad \forall V.$$

Toisinaan -erityisesti alkeiskirjoissa- Gaussin laki kirjoitetaan myös muodossa

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv \quad \forall V.$$

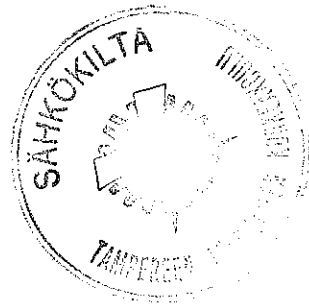
Mitä eroa on näillä kahdella eri tavalla esittää Gaussin laki?

4. Mitä *avaruuskulman* käsite tarkoittaa?
5. Magneettisen dipolimomentin $\mathbf{m}$ aiheuttaman kentän potentiaali on

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Selitä *periaate*, miten tämän lausekkeen avulla voidaan määrittää

- a) taskulampun virtapiirin aiheuttama $\mathbf{B}$ -kenttä kaukana lampusta,
- b) muuntajan rautasydämen magnetoitumisesta aiheutuva $\mathbf{B}$ -kenttä muuntajan lähiympäristössä.



Vektorialgebran taulukot kääntöpuolella

Vektorianalyysin kaavoja

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad (3)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (4)$$

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (5)$$

$$\nabla(a\phi + b\psi) = a\nabla\phi + b\nabla\psi \quad (6)$$

$$\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G} \quad (7)$$

$$\nabla \times (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G} \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi \quad (9)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (10)$$

$$\nabla \times \nabla\phi = 0 \quad (11)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F} \quad (12)$$

$$\nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi \quad (13)$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) \quad (14)$$

$$\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F} + \phi\nabla \cdot \mathbf{F} \quad (15)$$

$$\nabla \times (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{F} + \phi\nabla \times \mathbf{F} \quad (16)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = -\mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \quad (17)$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \quad (19)$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0 \quad (20)$$

$$\nabla\phi(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d\phi}{dr} \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{d\mathbf{F}}{dr} \quad (22)$$

$$\nabla \times [\mathbf{r}\phi(r)] = 0 \quad (23)$$

$$\nabla'\phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla\phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (24)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = \phi(r_2) - \phi(r_1) \quad (25)$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (26)$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} dv = - \oint_S \mathbf{F} \times \mathbf{n} da \quad (27)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da \quad (28)$$

Kaavoissa a ja b ovat skalaarivakioita, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ vakiovektoreita, ϕ ja ψ skalaarikenttiä ja $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{G}$ vektorikenttiä. $\mathbf{r}$ ja $\mathbf{r}'$ ovat paikkavektorikenttiä ja $r = |\mathbf{r}|$.

1. Gaussin laki magneettikentälle sanoo, että magneettivuo on nolla kaikkien suljettujen pintojen eli tilavuuksien reunapintojen yli. Kun tilavuuden annetaan lähestyä nollaa, raja-arvon avulla Gaussin laki saadaan lausuttua pisteittäisessä muodossa. Mitkä seuraavista lausekkeista

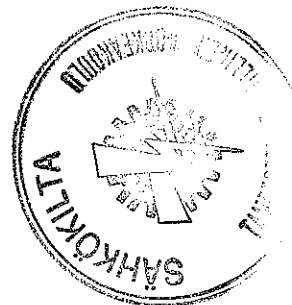
- (i) $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$,
- (ii) $\operatorname{div} \mu \mathbf{H} = 0$,
- (iii) $\mu \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$,
- (iv) $\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0$,
- (v) $\operatorname{div} \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0$,
- (vi) $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$,

tarkoittavat ja mitkä eivät magneettikentälle pisteittäin toteutuvaa Gaussin lakia (yleisesti sellaisissa väliaineissa, jotka eivät ole kestopagneetteja).

Jokaisesta oikeasta vastauksesta saa pisteen ja väärästä vastauksesta vähennetään piste siten, että tehtävästä voi kokonaisuudessaan saada pisteitä nollasta kuuteen.

2. Mikä on virrantiheyden $\mathbf{J}$ jatkuvuusyhtälö, ja mitä se pitää sisällään?
- ✓3. Mitä tarkoittavat sähköinen dipoli ja dipolimomentti. Mihin tällaista dipolia ja dipolimomenttia erityisesti tarvitaan sähkömagneettisessa kenttäteoriassa?
- ✓4. Mitä ovat ekvivalenttiset magneettiset virrat?
5. Maapallon pinnalla vaikuttaa vertikaalinen (eli pystysuora) ja lähes staattinen sähkökenttä maan pinnan ja yläilmakehän välillä. Minkälaisella mittausjärjestelyllä sähkökentän voimakkuuden E voi likimääräisesti mitata, jos käytössä on neliön muotoinen kuparilevy, kuparijohtoa, viivoitin sekä jännitemittari?

Vektorialgebran perustaulukko paperin kääntöpuolella.



Vektorianalyysin kaavoja

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad (3)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (4)$$

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (5)$$

$$\nabla(a\phi + b\psi) = a\nabla\phi + b\nabla\psi \quad (6)$$

$$\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G} \quad (7)$$

$$\nabla \times (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G} \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi \quad (9)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (10)$$

$$\nabla \times \nabla\phi = 0 \quad (11)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F} \quad (12)$$

$$\nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi \quad (13)$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) \quad (14)$$

$$\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F} + \phi\nabla \cdot \mathbf{F} \quad (15)$$

$$\nabla \times (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{F} + \phi\nabla \times \mathbf{F} \quad (16)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = -\mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \quad (17)$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \quad (19)$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0 \quad (20)$$

$$\nabla\phi(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d\phi}{dr} \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{d\mathbf{F}}{dr} \quad (22)$$

$$\nabla \times [\mathbf{r}\phi(r)] = 0 \quad (23)$$

$$\nabla'\phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla\phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (24)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = \phi(r_2) - \phi(r_1) \quad (25)$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (26)$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} dv = - \oint_S \mathbf{F} \times \mathbf{n} da \quad (27)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da \quad (28)$$

Kaavoissa a ja b ovat skalaarivakioita, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ vakiovektoreita, ϕ ja ψ skalaarikenttiä ja $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{G}$ vektorikenttiä. $\mathbf{r}$ ja $\mathbf{r}'$ ovat paikkavektorikenttiä ja $r = |\mathbf{r}|$.

