**MATH.APP.220 Usean muuttujan funktiot (syksy 2026)/ Mattila**
**Tentti 14.10.2026**

Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita, kaavakokoelma löytyy tentin lopusta. Tehtäväpaperia ei tarvitse palauttaa. Tehtävien ratkaisut löytyvät kokeen jälkeen kurssin Moodle-alueelta.

1. Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota

$$f(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2}.$$

   (a) Mikä on funktion $f$ (laajin mahdollinen) määrittelyjoukko $M_f$? Entä mikä on sen arvojoukko $A_f$? (2p)

   (b) Määritä tasa-arvokäyrä $f^{-1}(4) = \{(x,y) \in M_f \mid f(x,y) = 2\}$. (1p)

   (c) Mikä seuraavista raja-arvoon liittyvistä väitteistä on tosi tämän funktion $f$ kohdalla? Perustele vastauksesi. (2p)

   (i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ jollakin $L \in \mathbb{R}$,

   (ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \infty$,

   (iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -\infty$,

   (iv) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ei ole olemassa edes epäoleellisena raja-arvona.

   (d) Määritä osittaisderivaatta $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y)$. (1p)

2. (a) Muodosta funktion $f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ lineaarinen approksimaatio pisteen $(36,27)$ suhteen ja arvioi sen avulla lukua $\sqrt{37}\sqrt[3]{24}$. Vastauksen voi antaa sieventämättömässä summamuodossa $n+q$, missä $n \in \mathbb{Z}$ ja $q \in \mathbb{Q}$ ja $0 \le q < 1$. (3p)

   (b) Olkoon $F(x,y,z) = y + x^2 z$ ja $G(u,v) = (ue^v, \sin(v), 1/u)$. Vain toinen funktioista $F \circ G$ ja $G \circ F$ voidaan muodostaa. Määritä tämän yhdistetyn funktion lauseke ja laske sen derivaattamatriisi pisteessä $(2,0)$ ketjusääntöä apuna käyttäen. (3p, derivaattamatriisin määrittäminen jollain muulla tavalla tuottaa max 2p)

3. (a) Määritä funktion $f(x,y) = 2xy$ suurin ja pienin arvo yksikkökiekossa

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}. \qquad (4p)$$

   (b) Määritä integraali

$$\int_0^1 \int_x^1 x^2 e^{y^4}\, dy\, dx. \quad (3\text{p})$$

   Ohjeita: Integroimisjärjestys saattaa olla järkevää vaihtaa. Kiinnitä tällöin huomiota integroimisrajoihin, suositeltavaa on myös piirtää kuva integroimisalueesta.

4. (a) Laske $\displaystyle\int_1^2 \int_{1-y}^{1+y} \int_0^{yz} \frac{6xy}{z}\, dx\, dz\, dy$. (3p)

   (b) Tarkastellaan kappaletta $T$, jonka rajat sylinterikoordinaateissa ilmaistuna ovat $0 \le r \le 2$, $\pi/2 \le \theta \le 2\pi$ ja $0 \le z \le 4 - r^2$. Piirrä kuva kappaleesta karteesisessa koordinaatistossa ja määritä integraali $\displaystyle\iiint_T x\sqrt{(x^2+y^2)}\, dx\, dy\, dz$. (3p)

## Tentin kaavaliite

1. $f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})\mathbf{h} + \epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|$
2. $\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \iiint_U f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,dr\,d\theta\,dz$
3. $\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \iiint_U f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$
4. $m = \iiint_T \rho(\mathbf{x})\,dV, \qquad \bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\rho(\mathbf{x})\,dV, \qquad I_z = \iiint_T (x^2+y^2)(\mathbf{x})\,dV$
5. $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}, \qquad \cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$