

MAT-60150 Differentiaaliyhtälöt/Orelma

1. Välikoe 21.2.2014

Kirjoita jokaiseen konseptiin nimesi ja opiskelijanumerosi. Tee tehtävät siististi konsepteille väli-
vaiheet perustellen. Ei laskinta eikä muistiinpanoja.

Kokeessa saa olla mukana yksi kaksipuolinen A4 käsin kirjoitettu muistilappu.

1. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta^2 \\ \beta^2 & 0 \end{bmatrix},$$

missä $\beta \neq 0$.

(a) Etsi matriisi P ja diagonaalimatriisi D siten, että

$$A = PDP^{-1}.$$

(b) Määritä (a)-kohdan avulla eksponenttimatriisi e^{tA} .

(c) Jos

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} e^{t\beta^2} \\ e^{t\beta^2} \end{bmatrix}$$

on matriisiyhtälön $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ ratkaisu, mikä on se alkuarvo-ongelma, jota tämä ratkaisu vastaa ja mikä on sen ratkaisu?

2. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

jolloin

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \cos(t) & -e^t \sin(t) & 0 & 0 \\ e^t \sin(t) & e^t \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \cos(3t) & e^{2t} \sin(3t) \\ 0 & 0 & -e^{2t} \sin(3t) & e^{2t} \cos(3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^t \cos(t) & -e^t \sin(t) & -e^t \cos(t) + e^{2t} \cos(3t) & e^{2t} \sin(3t) \\ e^t \sin(t) & e^t \cos(t) & -e^t \sin(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \cos(3t) & e^{2t} \sin(3t) \\ 0 & 0 & -e^{2t} \sin(3t) & e^{2t} \cos(3t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tämän avulla:

(a) Määritä matriisin A ominaisarvot ja -vektorit.

(b) Määritä sellainen lohkodeagonaalimatriisi D ja matriisi $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \mathbf{v}_4]$, että

$$D = P^{-1}AP.$$

(c) Jos muunnosmatriisiksi vaihdetaan $Q = [\mathbf{v}_3 \ \mathbf{v}_4 \ \mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]$, niin mikä on tällöin lohkodeagonaalimatriisi D' jolle

$$D' = Q^{-1}AQ?$$