

MAT-41150 Algebra I (s).**28.5.2010. Esko Turunen**

Jos olet korvaamassa välikoetta 1, tee tehtävät 1 - 5. Jos olet korvaamassa välikoetta 2, tee tehtävät 6 - 10. Jos olet tenttimässä koko kurssia, tee parittomat tehtävät.

Tehtävä 1

Määritellään reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$ laskutoimitus $\oplus$ asettamalla $a \oplus b = a + b - a \cdot b$. Osoita, että $(\mathbb{R}, \oplus)$ on monoidi, mutta ei ole ryhmä. Perustele vastauksesi.

Tehtävä 2

Luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ Peano aksioomien avulla relaatio $m \leq n$ ” $m \in \mathbb{N}$ on korkeintaan yhtä suuri kuin $n \in \mathbb{N}$ ” määritellään yhteenlaskun kautta seuraavasti

$$m \leq n \text{ joss on olemassa sellainen } p \in \mathbb{N}, \text{ jolle } n = m + p.$$

Todista: Kaikilla $k, m, n \in \mathbb{N}$ pätee: (i) $n \leq n$ (refleksiivisyys), (ii) jos $m \leq n$ ja $n \leq m$, niin $m = n$ (antisymmetrisyys), (iii) jos $k \leq m$ ja $m \leq n$, niin $k \leq n$ (transitiivisuus).

Tehtävä 3

Olkoot G ja G' ryhmiä ja $h : G \rightarrow G'$ homomorfismi. Todista, että $h(e)$ on G' :n neutraalialkio, kun e on G :n neutraalialkio.

Tehtävä 4

Osoita, että aliryhmien leikkaus on aliryhmä eli jos G on ryhmä ja $H_i \leq G, i \in \Gamma$, niin $\bigcap_{i \in \Gamma} H_i \leq G$. Perustele vastauksesi.

Tehtävä 5

Ryhmän G *keskus* on G :n osajoukko

$$Z = \{z \in G; zg = gz \text{ aina, kun } g \in G\}$$

varustettuna indusoidulla laskutoimituksella. Todista, että Z on G :n kommutatiivinen normaali aliryhmä.

Tehtävä 6

Onko $\mathbb{Z}_6$ varustettuna $\mathbb{Z}$:sta indusoiduilla laskuoperaatioilla (a) kommutatiivinen rengas (b) kunta? Perustele vastauksesi.

Tehtävä 7

Esitä (a) Aritmetiikan (b) Algebran peruslause.

Tehtävä 8

Etsi s.y.t{120, 315} Eukleideen algoritmilla ja tämän perustella Bezout'in kertoimet x, y , ts. s.y.t. $\{120, 315\} = 120x + 315y$

Tehtävä 9

Olko $\varphi : R \rightarrow S$ rengashomomorfismi. Todista, että $\ker \varphi$ on R :n kaksipuolinen ideaali.

Tehtävä 10

Onko polynomi $Q(X) = 1 - 4X$ polynomirenkaan $\mathbb{Z}_{64}[X]$ yksikkö?

EI LASKIMIA EIKÄ KIRJALLISUUTTA!

MAT-41150 Algebra I (s). Välikoe 2.
25.5.2010 salissa K1704. Esko Turunen

Tehtävä 1

Kirjoita renkaan $\mathbb{Z}_{10}$ yhteen- ja kertolaskutaulut ja määrää näiden perusteella nollan jakajat, yksiköt ja aidot alirenkaat. Onko $\mathbb{Z}_{10}$ kokonaisalue tai kunta? Perustele kantasi.

Tehtävä 2

Esitä ja todista Aritmetiikan peruslause.

Tehtävä 3

Etsi s.y.t. $\{180, 42\}$ Eukleideen algoritmilla ja tämän perustella Bézout'in kertoimet x, y , ts. s.y.t. $\{180, 42\} = x180 + y42$

Tehtävä 4

Olkkoon $\varphi : R \rightarrow S$ rengashomomorfismi. Todista, että $\ker \varphi$ on R :n kaksipuolinen ideaali.

Tehtävä 5

Onko polynomi $Q(X) = 1 - 3X$ polynomirenkaan $\mathbb{Z}_{27}[X]$ yksikkö?

EI LASKIMIA EIKÄ KIRJALLISUUTTA!