MAT-41122 Matemaattinen optimointiteoria 1

Tentti

1.3.2011

Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta tai taulukoita esillä. Laskin sallittu.
Kaavakokoelmat 1 ja 2 jaetaan.
Jos uusit 1.välikokeen, ratkaise tehtävät 1-4.
Jos uusit 2. välikokeen, ratkaise tehtävät 5-8.
Tentti: ratkaise tehtävät 1, 2, 4, 7 ja 8.

1. Tarkastellaan tehtävää

$$
(1)\qquad \begin{aligned} \max\ z &= x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}
$$

a) Osoita, että $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ on käypä kantaratkaisu.

b) Ratkaise tehtävä simplex-algoritmilla alkuratkaisusta $\mathbf{x}_0$ aloittaen.

2. a) Mitä on kaksivaihetekniikka probleemaan

$$
(2)\qquad \begin{aligned} \min\ z &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}
$$

sovellettuna?

b) Onko mahdollista, että vaiheen I probleeman kohdefunktion $\tilde{z}$ arvot ovat alhaalta rajoittamattomia ($\inf \tilde{z} = -\infty$), vaikka alkuperäisen probleeman (2) optimiratkaisu on äärellinen?

3. a) Selosta kaksi eri menetelmää todeta laskennallisesti lineaarisen optimointiprobleeman (2) (ks. edellinen tehtävä) käypä joukko tyhjäksi.

b) Määrittele käsite äärisäde.

c) Miten määritellään konveksin monitahokkaan dimensio?

4. Tarkastellaan probleemaa

$$
(3)\qquad \begin{aligned} \min\ z &= \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2 + \mathbf{c}_3^T\mathbf{x}_3 \\ A_1\mathbf{x}_1 + A_1\mathbf{x}_1 &+ A_1\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 &\geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_3 \text{ vapaa} \end{aligned}
$$

missä $\mathbf{c}_i, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $A_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
Muodosta probleeman (3) duaaliprobleema.

5. a) Mikä on jonon $x_k = \dfrac{1}{k!}$ suppenemisen kertaluku?

b) Onko hakusuunta $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ funktion

$f(x,y) = x - 4xy + 4x^2 + 3y^2$

vähenemissuunta pisteessä $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$?

6. a) Laske funktiolle $f(x,y) = x - y + 2xy + 2x^2 + y^2$ Newtonin menetelmän mukainen hakusuunta pisteestä $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

b) Osoita: Jos kahdesti jatkuvasti differentioituvan funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Hessen matriisi $H_f(\mathbf{x}_k)$ on pisteessä $\mathbf{x}_k$ positiivisesti definiitti, niin Newtonin menetelmän antama hakusuunta pisteestä $\mathbf{x}_k$ pisteeseen $\mathbf{x}_{k+1}$ siirryttäessä on vähenemissuunta.

7. Tarkastellaan probleemaa

$$
\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ x_1^2 - x_2 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 - 2 &\leq 0 \end{aligned}
$$

Tutki pisteistä $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, mitkä niistä toteuttavat KKT-ehdot. Onko jokin niistä lokaali minimikohta? Entä globaali?

8. Sovella sisäistä sakkofunktiomenetelmää inverssiesteellä probleemaan

$$
\begin{aligned} \min f(x) &= x \\ 1 - x &\leq 0 \end{aligned}.
$$

MAT-41122 Matemaattinen optimointiteoria 1
Kaavakokoelma 1
2010-2011

1. $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ & $c_1 + \ldots + c_k = 0 \Rightarrow c_l = \ldots = c_k = 0.$

2. $\hat{\mathbf{c}}_N{}^T = \mathbf{c}_N{}^T - \mathbf{c}_B{}^T B^{-1} N$

3. $\min\{(\mathbf{x}_B)_j / a_{js}^* \mid a_{js}^* > 0\} = (\mathbf{x}_B)_r / a_{rs}^*$

4.

Maksimointi	$\leftrightarrow$	Minimointi
raj $\leq$		muuttuja ≥ 0
raj $\geq$		muuttuja ≤ 0
raj =		muuttuja vapaa
muuttuja ≥ 0		raj $\geq$
muuttuja ≤ 0		raj $\leq$
muuttuja vapaa		raj =

5.

$$\min\ w = w_1\mathbf{c}_1{}^T\mathbf{x} + \cdots + w_m\mathbf{c}_m{}^T\mathbf{x} \quad \left(w_i \geq 0, i = 1,\ldots,m;\ \sum_{i=1}^{m} w_i = 1\right)$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

6.

$$\min\ z_1 = \mathbf{c}_1{}^T\mathbf{x}$$

$$\mathbf{c}_i{}^T\mathbf{x} \leq \varepsilon_i,\ i = 2,\ldots,m$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

7.

$$\min \max_i w_i |z_i - \tilde{z}_i|$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

8. $$\min\left\{\left|\frac{\hat{c}_j}{a_{qj}^*}\right| \middle| a_{qj}^* < 0, j = 1,\ldots,n\right\} = \left|\frac{\hat{c}_r}{a_{qr}^*}\right|$$

MAT-41122 Matemaattinen optimointiteoria 1
Kaavakokoelma 2
2010-2011

1. $\mu_0 \nabla f(\mathbf{x}^*) + \mu_1 \nabla g_1(\mathbf{x}^*) + \cdots + \mu_m \nabla g_m(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
$\mu_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \; i = 1, \ldots, m.$

2.
$$T_S(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(\mathbf{x}^0)^T \mathbf{d} \le 0, i = 1, \ldots, m\} \cap \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \mid \nabla h_j(\mathbf{x}^0)^T \mathbf{d} = 0, j = 1, \ldots, s\}$$

3. $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \mu_1 \nabla g_1(\mathbf{x}^*) + \cdots + \mu_m \nabla g_m(\mathbf{x}^*) + \lambda_1 \nabla h_1(\mathbf{x}^*) + \cdots + \lambda_s \nabla h_s(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
$\mu_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \; i = 1, \ldots, m.$
$\mu_i \ge 0, i = 1, \ldots, m$

4. $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$

5. $x_{k+1} = x_k - f'(x_k) \dfrac{x_{k-1} - x_k}{f'(x_{k-1}) - f'(x_k)}$

6. $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{|r_{k+1} - r^*|}{|r_k - r^*|^p} = \beta$

7. $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}_k), \quad \alpha_k = \arg\min\limits_{\alpha \ge 0} f(\mathbf{x}_k - \alpha \nabla f(\mathbf{x}_k))$

8. $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - H_f(\mathbf{x}_k)^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k)$

9. $\mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0 = \mathbf{b} - Q\mathbf{x}_0,$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k,$$

$$\alpha_k = -\frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{d}_k}{\mathbf{d}_k^T Q \mathbf{d}_k},$$

$$\mathbf{d}_{k+1} = -\mathbf{g}_{k+1} + \beta_k \mathbf{d}_k,$$

$$\beta_k = \frac{\mathbf{g}_{k+1}^T Q \mathbf{d}_k}{\mathbf{d}_k^T Q \mathbf{d}_k},$$

$$\mathbf{g}_k = Q\mathbf{x}_k - \mathbf{b}.$$

10. $P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} (\max(0, g_i(\mathbf{x})))^2, \quad P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} (g_i(\mathbf{x}) + u_i^2)^2$

11. $A(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \dfrac{\mu}{2} \mathbf{h}(\mathbf{x})^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$

12. $B(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \ln(-g_i(\mathbf{x})), \quad B(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \dfrac{1}{g_i(\mathbf{x})}$

13. $g_j(\mathbf{x}_k) = \max\limits_i g_i(\mathbf{x}_k), \quad S_{k+1} = S_k \cap \{\mathbf{x} \mid g_j(\mathbf{x}_k) + \nabla g_j(\mathbf{x}_k)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \le 0\}$

14. (I) $A\mathbf{x} \le \mathbf{0}, \; \mathbf{c}^T \mathbf{x} > 0 \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$

(II) $A^T \mathbf{y} = \mathbf{c}, \; \mathbf{y} \ge \mathbf{0} \quad (\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m).$

15. (I) $A\mathbf{x} < \mathbf{0} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$

(II) $A^T \mathbf{y} = \mathbf{0}, \; \mathbf{y} \ge \mathbf{0}, \; \mathbf{y} \ne \mathbf{0} \quad (\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m).$