

Huom! Mukana ei saa olla kirjallisuutta, tietokoneita eikä taulukoita. Laskuvälineet ovat sallittuja.



1. Millä vakion c arvoilla uraehto

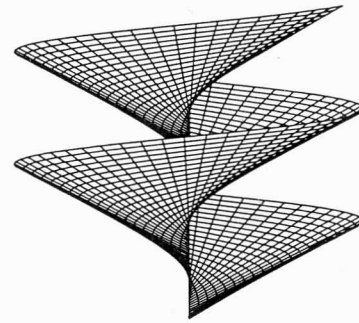
$$x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = c$$

ei määritä $\mathbb{R}^2$:n 1-ulotteista monistoa? (Perustelut mukaan!)

2. Parametrisoitu pinta

$$\begin{aligned} S : \mathbf{r} = \gamma(\mathbf{u}) &= (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2, au_1 + bu_2) \\ (0 < u_1 < 2, 0 < u_2 < 4\pi) \end{aligned}$$

on ns. *helikoidi* eli *ruuvipinta*. Tässä a ja b ovat vakioita ja $b \neq 0$. (Oheinen kuva: Maple.) **a)** Totea, että S on $\mathbb{R}^3$:n parametrisoitu 2-ulotteinen monisto ja **b)** etsi sen tangenttiavaruus ja normaaliavaruus pisteessä $\gamma(1, 3\pi)$ (anna jotkin kantavektorit).



3. Jos Φ on $\mathbb{R}^n$:n k -muotokenttä ja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ on jatkuvasti derivoituva funktio, niin $\mathbb{R}^m$:n k -muotokenttä

$$(f^*\Phi)(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = \Phi(f(\mathbf{p}); f'(\mathbf{p})\mathbf{r}_1, \dots, f'(\mathbf{p})\mathbf{r}_k)$$

on ns. Φ :n *pullback-muotokenttä* funktion f suhteen. (Merkintä $f^*\Phi$ on perinteinen. Huomaa, että $f'(\mathbf{p})\mathbf{r}_i$:t ovat n -ulotteisia vektoreita kuten pitääkin.)

- a)** Mikä on $\mathbb{R}^3$:n vektorikentän $\mathbf{F}$ työmuotokentän $\Phi_{\mathbf{F}\text{-work}}$ pullback-muotokenttä funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ suhteen?
b) Etsi pullback-muotokenttä $f^*\Phi$, missä $\Phi = y \, dx \wedge dz$ on $\mathbb{R}^3$:n 2-muotokenttä ja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on funktio $f(u, v) = (u^2, 2uv, v^2)$.

(Pullbackit liittyvät mm. muotokenttien integraaleihin parametrisoiduissa monistoissa—kuten ehkä huomaatkin—ja myöskin muuttujien vaihtoihin. Ne käyttäytyvät hyvin mukavasti, mm. kaavat $f^*(\Phi \wedge \Psi) = f^*\Phi \wedge f^*\Psi$ ja $d(f^*\Phi) = f^*d\Phi$ pätevät.)

4. Lähtien $\mathbb{R}^3$:n vuomuotokentästä $\Phi_{\mathbf{F} \times \mathbf{a}\text{-flux}}$, missä $\mathbf{F}$ on vektorikenttä ja $\mathbf{a}$ on vakiovektori, johda Yleistetyn Stokesin lauseen seurauksena vektoraalinen Gaußin lauseen variantti

$$\int_{\vec{\mathcal{K}}} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = - \oint_{\vec{\partial\mathcal{K}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{S}.$$

(Vihje: Samaan tapaan kuin Vektoraalisen Gaußin lauseen johto.)

5. Selosta lyhyesti mitä ovat **a)** skalaaripotentiali, **b)** vektoripotentiali, **c)** nelipotentiali ja **d)** Helmholtzin hajotelma.

Kaavoja $\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow$

Kaavoja:

Skalaarikolmitulon kiertosääntö:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{c} \bullet \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Vektorikolmitulon kehityskaavat:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \bullet \mathbf{c})\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Sylinterikoordinaatistomuunnos:

$$\mathbf{r} = \mathbf{h}(r, \phi, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z), \quad \det(\mathbf{h}'(r, \phi, z)) = r$$

Pallokoordinaatistomuunnos:

$$\mathbf{r} = \mathbf{h}(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \theta), \quad \det(\mathbf{h}'(\rho, \theta, \phi)) = \rho^2 \sin \theta$$

Tulon derivointisäännöt:

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$$

$$\nabla \bullet (f\mathbf{G}) = \nabla f \bullet \mathbf{G} + f\nabla \bullet \mathbf{G}$$

$$\nabla \times (f\mathbf{G}) = \nabla f \times \mathbf{G} + f\nabla \times \mathbf{G}$$

$$\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} \bullet \mathbf{G} - \mathbf{F} \bullet \nabla \times \mathbf{G}$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \bullet \mathbf{F})\mathbf{G} + (\nabla \bullet \mathbf{G})\mathbf{F} - (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G}$$

$$\nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) = \mathbf{F}'^T \mathbf{G} + \mathbf{G}'^T \mathbf{F}$$

$$= (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} + (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F})$$

$k + 1$ -muotokentän Φ potentiaali tähtimäisessä kappaleessa pisteen $\mathbf{p}_0$ suhteen:

$$(\mathbf{I}\Phi)(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = \int_0^1 t^k \Phi(\mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0); \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) dt.$$

