MAT-31101 Numeerinen analyysi 1 tentti 17.2.2010
MAT-31106 Numerical Analysis 1 Exam 17.2.2010

Tentissä saa käyttää tavallista tai graafista/ohjelmoitavaa laskinta ja yhtä kaksipuolista käsinkirjoitettua A4-paperia muistiinpanoja (ei valokopio, ei tulostettu). Laskuissa välivaiheet on kirjoitettava näkyviin.

You are allowed to use a plain or graphing/programmable calculator and one handwritten two-sided A4 sheet of notes (not a photocopy, not a printout). Show all calculation steps.

1. (a) Tiedetään, että $\sinh(1.234\cdot 10^{-16}) = \frac{1}{2}(e^{1.234\cdot 10^{-16}} - e^{-1.234\cdot 10^{-16}}) \approx 1.234000000000313\cdot 10^{-16})$, mutta MATLAB laskee

```
>> x=1.234e-16;
>> y=(exp(x)-exp(-x))/2

y =

    1.6653e-16
```

Mikä on tuloksen merkitsevien numeroiden lukumäärä? Perustele.

It is known that $\sinh(1.234\cdot 10^{-16}) = \frac{1}{2}(e^{1.234\cdot 10^{-16}} - e^{-1.234\cdot 10^{-16}}) \approx 1.234000000000313\cdot 10^{-16})$, but MATLAB gives the above result. What is the number of significant digits in the result? Justify.

(b) Selitä, miksi (a)-kohdan MATLAB-lausekkeet laskevat funktion $\sinh(x)$ arvon hyvin epätarkasti, ja kirjoita koodi uudelleen sellaiseen muotoon, että tulos on tarkka tälle x-arvolle. (Ei saa käyttää MATLABin `sinh` funktiota.)

Explain why the MATLAB command sequence in (a) computes $\sinh(x)$ so inaccurately, and rewrite the code so that it produces an accurate result for this x value. (Don't use MATLAB's `sinh` function.)

2. (a) Suorita kaksi sekanttimenetelmän iteraatiota aloitusarvoilla $x_0 = 0.5$ ja $x_1 = 1$ funktion $f(x) = x - \cos(x)$ nollakohdan laskemiseksi.

Do two iterations of the secant method with starting values $x_0 = 0.5$ and $x_1 = 1$ to find a zero of $f(x) = x - \cos(x)$.

(b) Näytä, että $[x_0, x_1] = [0.5, 1.0]$ on funktion f nollakohdan haarukointiväli. Etsi (tekemättä iteraatioita) puolittamismenetelmän iteraatioiden lukumäärä, jolla voitaisiin laskea nollakohta kahdeksan merkitsevän numeron tarkkuudella. (Yksi iteraatio vastaa yhtä funktion f arvon laskemista, ja ensimmäisenä iteraationa olkoon arvon $f(\frac{x_0+x_1}{2})$ laskeminen.)

Show that $[x_0, x_1] = [0.5, 1.0]$ is a bracketing interval for a zero of f, and determine (without doing any iterations) how many bisection method iterations would be needed to compute an estimate that has 8 significant digits. (Count each f evaluation as one iteration, and count the evaluation of $f(\frac{x_0+x_1}{2})$ as the first iteration.)

3. Etsi Newtonin muodon polynomi, joka interpoloi kaikki taulukon pisteet. Etsi (ilman uusia laskuja) astetta 2 oleva polynomi, joka interpoloi taulukon 3 ensimmäistä pistettä. Etsi astetta 3 oleva polynomi, joka on taulokon datan paras

Jussi-Pekka Teini
jussi-pekka.teini@tut.fi

sovite pienimmän neliösumman mielessä.

x	21	22	24	26
$f(x)$	0.433157	1.008891	2.473362	0.466471

Find the Newton form of the polynomial that interpolates all the points in the table. Without doing any further computation, find a polynomial of degree 2 that interpolates the first three points in the table. Find the polynomial of degree 3 that is the best least-squares fit of all the data in the table.

4. (a) Näytä, että $P_0(x) = 1$ ja $P_1(x) = x - \frac{2}{3}$ ovat ortogonaaliset skalaaritulon $(f, g) = \int_0^1 x f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$ suhteen.

   Show that $P_0(x) = 1$ and $P_1(x) = x - \frac{2}{3}$ are orthogonal with respect to the scalar product $(f, g) = \int_0^1 x f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$.

   (b) Etsi polynomi $p(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x)$, joka on funktion $f(x) = x^{1/2}$ paras approksimaatio pienimmän neliösumman mielessä välillä $[0, 1]$ ja painolla $w(x) = x$.

   Find the polynomial $p(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x)$ that is the best least squares approximation of $f(x) = x^{1/2}$ on the interval $[0, 1]$ with weight $w(x) = x$.

   (c) Selitä, miksi virhe $|p(x) - f(x)|$ on isompi välin vasemalla puolella kuin välin oikealla puolella.

   Explain why the error $|p(x) - f(x)|$ is larger in the left half of the interval than in the right half.