

Algoritmimatematiikka

Tentti 10.05.2011

Ei laskinta tai kirjallista materiaalia. Tautologia- ja interferenssikokeelma kääntöpuolella.

Esitä tehtävät 1 ja 2 yhdellä konseptilla ja tehtävät 3 ja 4 toisella.
Laita molempiin konsepteihin nimesi ja opiskelijanumerosi.

1. Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x = 2n - 1, n \leq 3\}$ ja $C = \{2, 3, 5\}$

- (a) Esitä alkioittain joukko $A^2 \cap B \times (A \cup C)$. Kirjoita kaikki tarvittavat välivaiheet vastauspaperiisi. (3p)
- (b) Esittääkö kohdan (a) joukko funktiota? Perustele. (1p)
- (c) Todista vastaesimerkillä (ei totuustaululla), että seuraava teoria ei ole pätevä. (2p)

$$(p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow p) \wedge (\neg r \rightarrow q).$$

2. Olkoon $f : \text{Lists}[A] \rightarrow A$,

$$f(L) = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } L = \langle \rangle \\ \{\text{head}(L)\} \cup f(\text{tail}(L)), & \text{muulloin} \end{cases}$$

- (a) Esittele kaikki rekursion välivaiheet näyttäen, mitä on $f(\langle 1, 2, 3, 2, 1, 2 \rangle)$ sievennetyssä muodossa. Vihje: $\{\}$ ovat joukkosulkeet. (3p)
- (b) Olkoon funktio g esitetty sisä- eli infix-muodossa $g(x) = x^2$ ja funktio h ulko- eli prefix-muodossa $h = + \circ \langle g \circ \cos, g \circ \sin \rangle$. Esitä lauseke $h(x)$ sisämuodossa kaikki sievennyksen välivaiheet näyttäen ja vastaa kysymykseen: mitä on $h(0)$? (3p)

Esitä tehtävät 1 ja 2 yhdellä konseptilla ja tehtävät 3 ja 4 toisella.
Laita molempiin konsepteihin nimesi ja opiskelijanumerosi.

3. Seuraavassa on aloitettu todistamaan epäsuoralla todistuksella erästä teoriaa, jonka johtopäätös on $A \vee B$.

1.	$C \rightarrow A$	P
2.	$\neg C \rightarrow B$	P
3.	$\neg(A \vee B)$	P (IP)

- (a) Mitkä ovat teorian premissit sekä teorian lauseke? (1p)
- (b) Kirjoita todistus (interferenssitodistuksena) loppuun asti. (5p)

4. Olkoon $D = \{b, s, h, v, q\}$.

- (a) Muodosta relaatiolle $K : D \leftrightarrow D$, $K = \{\langle b, s \rangle, \langle v, h \rangle, \langle q, q \rangle, \langle s, v \rangle\}$ refleksiivinen sulkeuma, symmetrinen sulkeuma ja transitiivinen sulkeuma. (3p)
- (b) Esitä alkioittain relaatio $R : D \leftrightarrow D$, joka toteuttaa kaikki seuraavat ehdot: R on irrefleksiivinen osittainen järjestys ja joukon R mahtavuus on 5. Piirrä osittaisesta järjestyksestä R Hasen diagrammi. (3p)

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$ $p \vee \mathbf{e} = p$ $p \vee p = p$ $p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$ $p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$ $p \wedge p = p$ $p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$p \rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}$ $p \rightarrow \mathbf{e} = \neg p$ $\mathbf{t} \rightarrow p = p$ $\mathbf{e} \rightarrow p = \mathbf{t}$ $p \rightarrow p = \mathbf{t}$ $p \rightarrow q = \neg p \vee q$ $p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$ $\neg(p \rightarrow q) = p \wedge \neg q$

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$ $p \vee q = q \vee p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$ $p \vee (p \wedge q) = p$ $p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$ $p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP $\frac{A, A \rightarrow B}{\therefore B}$	MT $\frac{A \rightarrow B, \neg B}{\therefore \neg A}$	Conj $\frac{A, B}{\therefore A \wedge B}$	Simp $\frac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\frac{A}{\therefore A \vee B}$	DS $\frac{A \vee B, \neg B}{\therefore A}$	HS $\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$	

muista rajoitukset

UI $\frac{\forall x W(x)}{\therefore W(t)}$	UG $\frac{W(t)}{\therefore \forall x W(x)}$	EG $\frac{W(t)}{\therefore \exists x W(x)}$	EI $\frac{\exists x W(x)}{\therefore W(t)}$
---	---	---	---

Ekvivalensseja

$\neg\forall x W(x) = \exists x \neg W(x)$ $\exists x (A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ $\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ $\exists x \exists y W(x, y) = \exists y \exists x W(x, y)$	$\neg\exists x W(x) = \forall x \neg W(x)$ $\forall x (A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ $\forall x \forall y W(x, y) = \forall y \forall x W(x, y)$
---	--

$\forall x (C \vee A(x)) = C \vee \forall x A(x)$ $\exists x (C \vee A(x)) = C \vee \exists x A(x)$ $\forall x (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \forall x A(x)$ $\forall x (A(x) \rightarrow C) = \exists x A(x) \rightarrow C$	$\forall x (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x A(x)$ $\exists x (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x A(x)$ $\exists x (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \exists x A(x)$ $\exists x (A(x) \rightarrow C) = \forall x A(x) \rightarrow C$
--	--

Implikaatioita

$\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$ $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$ $\exists y \forall x W(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y W(x, y)$	$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$
---	--