



MAT-20451 Fourier'n menetelmät

Tentti 18.4.2013 / Merja Laaksonen

- Ei muistintapanoja, kirjallisuutta, laskinta.

1. Funktio f on määritelty yhtälöillä

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } -\pi < t < 0, \\ 1, & \text{kun } 0 < t < \pi, \end{cases} \quad f(t + 2\pi) = f(t).$$

Laske määritelmän mukaisesti sille kompleksisen Fourier-sarjan kertoimet ja esitä sarjalle ns. kolmas esitysmuoto.

2. Olkoon

$$f(t) = 4 + 6 \cos\left(\frac{1}{2}t - 2\right) + 3 \cos(2t + 1)$$

Määritä f 'n perustaajuus ω_0 ja piirrä kuvat (selkeät) amplitudi- ja vaihespektristä.

3. Käytössä on aikatasossa jono $\{1, 0, -1, 0\}$. Laske jonolle diskreetti Fourier-muunnos (DFT).

4. Laske Fourier-muunnos funktiolle

$$f(t) = \frac{\cos(3t)}{t^2 + 1}.$$

Tehtävässä voi olla hyötyä tuloksesta: $\mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \frac{2}{\omega^2 + 1}$.

Kaavakokoelma tentissä 18.4.2013

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), & \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \\ \sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)), & \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)), \\ \sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)). \end{aligned}$$

$$\hat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos(n\omega t + \theta_n)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \cos(n\omega t) dt, & n &= 0, 1, 2, 3, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \sin(n\omega t) dt, & n &= 1, 2, 3, \dots \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt, & n &= 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T} \int_d^{d+T} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad g_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G_n e^{jnk\frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega u} du, \quad \mathcal{F}^{-1}\{F\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

$$\mathcal{F}\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \neq 0,$$

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\}(\omega) = e^{-j\omega a} F(\omega),$$

$$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\}(\omega) = F(\omega) G(\omega),$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f\}(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{F(t)\}(\omega) = 2\pi f(-\omega).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$\hat{F}(\omega) = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) e^{-j\omega kh}, \quad \{\hat{F}_n\}_{n=0}^{N-1} = \{h G_n\}_{n=0}^{N-1}.$$