MAT-20451 Fourier'n menetelmät

Tentti 6.3.2013 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
- Kirjoita konsepteihin FM, nimesi ja numerosi
- Piirrä pääkonseptiin nimen alle peräkkäin neljä neliötä a' 2 × 2.

1. Funktio f on määritelty yhtälöillä

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } -\pi < t < 0, \\ 0, & \text{kun } 0 < t < \pi, \end{cases} \qquad f(2\pi + t) = f(t).$$

Laske määritelmän mukaisesti sille trigonometrinen Fourier-sarja.

2. Suoran pätkä $y = 1 + t, t \in (0,1)$ jatketaan parittomaksi funktioksi r. Piirrä kuva. Sen Fourier-sarja on $\hat{r}$.
a) Onko $\hat{r}$ sinisarja, kosinisarja vai ei kumpaakaan? Miksi?
b) Syntyykö Gibssin ilmiötä? Jos syntyy, niin missä kohdissa?
c) Minkä suorien $y = a$ ja $y = b$, $a, b \in \mathbb{R}$ väliin $\hat{r}$ mahtuu? Kyseessä on likiarvot, jotka eivät saa olla liian pieniä eikä turhan suuria.

3. Laske signaalin $f : f(t) = -\frac{3}{2j}e^{-j2t} + 1 + \frac{3}{2j}e^{j2t}$ keskimääräinen teho
a) sarjan summana,
b) määrättynä integraalina.

4. Laske Fourier-muunnos funktiolle

$$f : f(t) = \cos(t)\Big(H(t+\pi) - H(t-\pi)\Big).$$

Sievennä tulos.

Kaavakokoelma tentissä 6.3.2013

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$, $\quad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big)$, $\quad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big)$,

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)$.

$$\hat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\Big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n|\cos(n\omega t + \theta_n)$$

A_n

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt, && n = 0,1,2,3,\ldots \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt, && n = 1,2,3,\ldots \\ c_n &= \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)e^{-jn\omega t}\,dt, && n = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T}\int_d^{d+T} f^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-jnk\frac{2\pi}{N}},\ n = 0,1,2,\ldots,N-1, \qquad g_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} G_n e^{jnk\frac{2\pi}{N}},\ k = 0,1,2,\ldots,N-1.$$

$$\mathscr{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u}\,du, \qquad \mathscr{F}^{-1}\{F\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega.$$

$\mathscr{F}\Big\{f(at)\Big\}(\omega) = \frac{1}{|a|}F\Big(\frac{\omega}{a}\Big),\ a \neq 0,$ $\qquad \mathscr{F}\Big\{f'(t)\Big\}(\omega) = j\omega F(\omega)$

$\mathscr{F}\Big\{f(t-a)\Big\}(\omega) = e^{-ja\omega}F(\omega),$ $\qquad \mathscr{F}\{e^{jbt}f(t)\}(\omega) = F(\omega - b)$

$\mathscr{F}\Big\{(f*g)(t)\Big\}(\omega) = F(\omega)G(\omega),$ $\qquad \mathscr{F}\Big\{f(t)g(t)\Big\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(F*G)(\omega)$

$\mathscr{F}\Big\{\mathscr{F}\{f\}(t)\Big\}(\omega) = \mathscr{F}\Big\{F(t)\Big\}(\omega) = 2\pi f(-\omega).$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$$

$$\hat{F}(\omega) = h\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)e^{-j\omega kh}, \qquad \Big\{\hat{F}_n\Big\}_{n=0}^{N-1} = \Big\{hG_n\Big\}_{n=0}^{N-1}.$$