

MAT-20451 Fourier'n menetelmät

Tentti 1.3.2011

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.
- Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.

1. Olkoon T -jaksoisella funktiolla $f(t)$ Fourier-sarja

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

missä $\omega = 2\pi/T$ ja missä kertoimet ovat toistaiseksi tuntemattomia. Johda eli päätele seuraavasti: integroi yhtälö

$$f(t) \sin(2\omega t) = \frac{1}{2} a_0 \sin(2\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) \sin(2\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \sin(2\omega t))$$

puolittain $\int_{-T/2}^{T/2} \dots dt$ ja oletta, että yhtälön oikea puoli saadaan integroida

yhteenlaskettava kerrallaan. Päätele jokaiselle oikean puolen integraalille arvo hyödyntäen integroitavan parittomuus ja tieto

$$2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b).$$

(Yhdelle sarjan kertoimista pitäisi näin syntyä laskukaava.)

2. Laske funktion Fourier-sarjan kompleksiversiolle kaikki kertoimet

$$c_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \left(\int_d^{d+T} f(t) \cos(n\omega t) dt - j \int_d^{d+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \right)$$

kun $f(t) = |\cos(t)|$. Muodosta lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}.$$

Vihje 1: Hahmottele funktion kuvaajaa ja päätele sen avulla T sekä ω .

Vihje 2: Integroitava parillinen tai pariton ja reaalinen.

Vihje 3: $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$.

Vihje 4: $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$

Käännä!

3. Tunnetaan Fourier-muunnos $F(j\omega) = 2AT\text{sinc}(\omega T)$ tasapulssille

$$f(t) = \begin{cases} A & (|t| \leq T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases} = A [H(t+T) - H(t-T)]$$

Päättelee Fourier-muunnos

- a) tasapulssille $z(t) = H(t+2) - H(t-2)$,
- b) ikkunoidulle sinille $y(t) = \sin(3t) [H(t+2) - H(t-2)]$,
- c) ikkunoidulle sinille $x(t) = \sin(2t) [H(t+4) - H(t)]$.

Tiedetään, että $e^{jx} = \cos x + j \sin x$,

joten $e^{-jx} = \cos x - j \sin x$ ja $e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos x$ ja $e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x$.

Ominaisuuksia: Jos $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$, niin $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-j\omega\tau}F(j\omega)$ ja $\mathcal{F}\{e^{jat}f(t)\} = F(j(\omega-a))$ ja $\mathcal{F}\{F(jt)\} = 2\pi f(-\omega)$.

4. Johda symmetriaominaisuuden avulla Fourier-muunnos

- a) ensin funktiolle $f(t) = \text{sinc}(4t)$,
- b) sitten funktiolle $g(t) = \text{sinc}(4t - 20)$.
- c) Sievennä b-kohdassa saadun muunnoksen amplitudi eli itseisarvo mahdollisimman yksinkertaiseksi.