

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.
- Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.

1. Laske tai päättele suoraan (parillisuuden tai parittomuuden nojalla) funktion  $h(t) = |\cos(t)|$  kompleksisen Fourier-sarjan kaikki kertoimet

$$c_n = \frac{1}{T} \left( \int_d^{d+T} h(t) \cos(n\omega t) dt - j \int_d^{d+T} h(t) \sin(n\omega t) dt \right)$$

ja muodosta lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}.$$

Vihje 1: Hahmottele funktion kuvaajaa ja päättele sen avulla  $T$  sekä  $\omega$ .

Vihje 2:  $2 \cos(t) \cos(mt) = \cos(m-1)t + \cos(m+1)t$ .

2. Funktiolle  $f(t) = |\sin(t)|$  tunnetaan kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} e^{j2nt}$$

a) Muodosta tästä funktion  $f(t)$  Fourier-sarjan trigonometrinen versio

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

missä

$$\frac{1}{2} a_0 = c_0, \quad a_n = c_n + c_n^*, \quad b_n = j(c_n - c_n^*) \quad (n \geq 1)$$

b) Olisiko funktion  $f(t)$  Fourier-sarjasta termeittäin derivoimalla saatava sarja (jos se muodostettaisiin) derivaatan  $f'(t)$  Fourier-sarja? Perustele.

**Käännä!**

3. Tunnetaan Fourier-muunnos  $K(j\omega) = AT \text{sinc}^2(\omega T/2)$  kolmiopulssille

$$k(t) = \begin{cases} (A/T)t + A & (-T \leq t \leq 0) \\ (-A/T)t + A & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases}$$

a) Johda Fourier-muunnos kolmiopulssille

$$f(t) = t [H(t) - H(t - 1/2)] + (1 - t) [H(1 - 1/2) - H(t - 1)]$$

[4 pistettä]

b) Totea a)-kohdan vastauksen itseisarvo ja perustele se.

[2 pistettä]

Apuna: Jos  $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$ , niin  $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-j\omega\tau}F(j\omega)$  ja  $\mathcal{F}\{e^{jat}f(t)\} = F(j(\omega-a))$   
ja  $\mathcal{F}\{F(jt)\} = 2\pi f(-\omega)$ .

4 a) Tehtävän 3 kolmiopulssin  $k(t)$  esitys Fourier-integraalina

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] d\omega$$

sievenee, kun sisempi integraali korvataan valmiiksi lasketulla pulssin Fourier-muunnoksella. Tee tämä sievennys!

b) Edellä saadun integraalin likiarvo

$$k(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \dots d\omega$$

sievenee vielä lisää. Tee tämä sievennys mahdollisimman pitkälle!

(Vihje: Parillisuus ja parittomuus ja origokeskinen väli.)

# MAT-20450 Fourier'n menetelmät

Tentti 14.01.2008

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.
- Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.

1. Laske tai päättelee suoraan (parillisuuden tai parittomuuden nojalla) funktiolle  $h(t) = |\sin(t)|$  trigonometrisen Fourier-sarjan kaikki kertoimet

$$a_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} h(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{ja} \quad b_n = \dots$$

ja muodosta lopuksi funktion trigonometrinen Fourier-sarja

$$h(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Vihje 1: Hahmottele funktion kuvaajaa ja päättelee sen avulla  $T$  sekä  $\omega$ .

Vihje 2:  $2 \sin(t) \cos(mt) = \sin(m+1)t - \sin(m-1)t$ .

Vihje 3:  $2 \sin(t) \sin(mt) = \cos(m-1)t - \cos(m+1)t$ .

2. Funktio  $g(t) = \cos(t) + \sin(t)$  on samalla oma trigonometrinen Fourier-sarjansa. Päättelee tästä Fourier-sarjan kompleksiversion

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t},$$

kaikki kertoimet nimenomaan kaavoilla

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n) \quad (n \geq 1)$$

(vaikka osaisitkin päätellä ne myös jollain muulla tavalla) ja muodosta lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja.

3 a) 'On-off' -pulssin esitys Fourier-integraalina

$$f(t) = \begin{cases} A & (-T \leq t < 0) \\ -A & (0 \leq t < T) \end{cases} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right] d\omega$$

sievenee, kun sisempi integraali korvataan valmiiksi lasketulla pulssin Fourier-muunnoksella  $F(j\omega) = AT^2 j\omega \text{sinc}^2(\omega T/2)$ . Tee tämä sievennys!

b) Edellä saadun integraalin likiarvo

$$f(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \dots d\omega$$

sievenee vielä lisää. Tee tämä sievennys mahdollisimman pitkälle!

(Vihje: Parillisuus ja parittomuus ja origokeskinen väli.)

4. Signaalista  $f(t)$  otetaan  $N$  näytearvoa yhden yksikön aikavälein ja saadaan arvot

$$f(n) \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

Niistä lasketaan diskreetti Fourier-muunnos (vaikkapa MATLABin komennolla **fft**) ja saadaan  $N$  arvoa

$$F(k) = \sum_{n=1}^N f(n) e^{-j(n-1)(k-1)2\pi/N} \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Sitten kaksinkertaistetaan näytearvojen määräksi  $2N$  täydentäen aikaisempia arvoja keinotekoisesti arvoilla

$$f(n) = 0 \quad (n = N+1, N+2, \dots, 2N).$$

Näistä lasketut diskreetin Fourier-muunnoksen  $2N$  arvoa ovat vastaavasti

$$G(p) = \sum_{n=1}^{2N} f(n) e^{-j(n-1)(p-1)2\pi/(2N)} \quad (p = 1, 2, \dots, 2N).$$

Osoita, että yhtälö  $G(2k-1) = F(k)$  toteutuu kaikilla arvoilla  $k = 1, 2, \dots, N$  tai osoita että ei toteudu ainakin yhdellä arvoista  $k = 1, 2, \dots, N$ .



- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.
- Kirjoita papereihin nimesi, numerosi ja koulutusohjelmasi.

1. Funktiolle  $f(t) = |\cos(t)|$  tunnetaan kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} e^{jn\omega t},$$

a) Muodosta tästä kompleksinen Fourier-sarja funktiolle  $g(x) = |\sin(x)|$  yhtälön  $\sin(x) = \cos(x-\pi/2)$  avulla. [4 pistettä]

Ohje: Muuttujan vaihto  $t = x - \pi/2$  funktioon ja sen sarjaan näyttää ensi vilkaisulla muuttavan sarjan pois Fourier-sarjan rakenteesta. Varmista a-kohdassa, että näin ei kuitenkaan käy, sieventämällä tulos mahdollisimman pitkälle ja niin, että sarjan kertoimet  $c_n$  ja  $\omega$  näkyvät. Totea ne!

b) Tuotta(isi)vatko a-kohdan sarjan osasummat Gibbsin ilmiön pisteessä  $x = \pi$ ? Perustele. [2 pistettä]

2 a) Muodosta tehtävässä 1 annetusta funktion  $f(t)$  Fourier-sarjan trigonometrinen versio

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

missä

$$\frac{1}{2}a_0 = c_0, \quad a_n = c_n + c_n^*, \quad b_n = j(c_n - c_n^*) \quad (n \geq 1)$$

b) Olisiko (jos muodostettaisiin) tehtävän 1 funktion  $f(t)$  Fourier-sarjasta termeittäin derivoimalla saatava sarja derivaatan  $f'(t)$  Fourier-sarja? Perustele.

3. Olkoon funktiolla  $f(t)$  Fourier-muunnos määritelmän mukaisena:

$$F\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \text{missä} \quad e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t.$$

Johda Fourier-muunnos funktiolle  $f(at)$ , kun  $a > 0$ .

4. Tasapulssille

$$f(t) = \begin{cases} A & (|t| \leq T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases}$$

tiedetään Fourier-muunnos  $F(j\omega) = 2AT \text{sinc}(\omega T)$ . Johda muunnos

a) tasapulssille  $H(t) - H(t-T)$ ,

b) ikkunoidulle ~~sinille~~  $x(t) = \cos(\omega_0 t) [H(t) - H(t-T)]$ .

*kuosille*

Apuna: Jos  $F\{f(t)\} = F(j\omega)$ , niin  $F\{f(t-\tau)\} = e^{-j\omega\tau} F(j\omega)$  ja  $F\{e^{jat} f(t)\} = F(j(\omega-a))$  ja  $F\{F(j\omega)\} = 2\pi f(-\omega)$ .

(Kysymys: Pulssista  $\cos(\omega_0 t)$  otetaan näytteitä tasavälein äärellisellä aikavälillä (käytännössä), sanokaamme välillä  $[0, T]$ , kun viimeinen näyte otetaan hetkellä  $T$ . Näytteiden diskreetin Fourier-muunnoksen itseisarvot tuottavat kauniin kuvan piikkeen kulmataajuuden  $\omega_0$  kohdalla. Mutta mitä tuo kuva ja DFT-itseisarvot esittävät, kun pulssilla  $\cos(\omega_0 t)$  ei ole teoreettista Fourier-muunnosta?

Vastaus: Näytteet otettiin todellisuudessa tehtävän 4b signaalista.)

