

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.
- Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.

1. Olkoon T -jaksoisella funktiolla $f(t)$ Fourier-sarja

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

missä $\omega = 2\pi/T$ ja missä kaikki kertoimet ovat toistaiseksi tuntemattomia. Johda eli päättele seuraavasti: integroi tuo yhtälö puolittain

$T/2$

$\int \dots dt$ ja oletta, että yhtälön oikea puoli saadaan integroida yhteen-

$-T/2$

laskettava kerrallaan. Päättele jokaiselle oikean puolen integraalille arvo laskemalla se tai hyödyntäen integroitavan parittomuus. (Yhdelle kertoimista pitäisi näin syntyä laskukaava.)

2. Laske funktion $f(t) = \cos(t) + \sin(t)$ Fourier-sarjan kompleksiversiolle kaikki kertoimet

$$c_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \left(\int_d^{d+T} f(t) \cos(n\omega t) dt - j \int_d^{d+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \right)$$

hyödyntäen integroitavan parittomuus ja jo(i)tain seuraavista:

$$2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

$$2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b),$$

$$2 \cos(a) \sin(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b).$$

Muodosta lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}.$$

Käännä!

3 a) Kolmiopulssin esitys Fourier-integraalina

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & (-1 \leq t \leq 0) \\ -t+1 & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega$$

sievenee, kun sisempi integraali korvataan valmiiksi lasketulla pulssin Fourier-muunnoksella $F(j\omega) = \text{sinc}^2(\omega/2)$. Tee tämä sievennys!

b) Edellä saadun integraalin likiarvo

$$f(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \dots d\omega$$

sievenee vielä lisää. Tee tämä sievennys mahdollisimman pitkälle! (Saatavaa integraalia ei tarvitse yrittää laskea.)

Vihje: Parillisuus ja parittomuus ja origokeskinen väli.

4. Olkoon $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$. Päättele Fourier-muunnos funktiolle

$$f(t) \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)$$

seuraavasti: esitä trigonometriset funktiot eksponenttifunktion avulla, käytä lineaarisuutta ja taajuussiirto-ominaisuutta (yksi alla luetelluista).

Tiedetään, että

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x,$$

$$\text{joten } e^{-jx} = \cos x - j \sin x \quad \text{ja} \quad e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos x \quad \text{ja} \quad e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x.$$

Ominaisuuksia: Jos $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$, niin $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-j\omega\tau} F(j\omega)$ ja $\mathcal{F}\{e^{jat} f(t)\} = F(j(\omega-a))$ ja $\mathcal{F}\{F(jt)\} = 2\pi f(-\omega)$.