Antti Leinonen

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-20401 Vektorianalyysi
Tentti 25.7.2011

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite on ohessa.

1. **a)** Olkoon $\mathbf{F}(x,y,z) = xe^y\mathbf{i} + ye^z\mathbf{k}$. Laske seuraavista ne, jotka voidaan laskea (eli jotka ovat hyvin määriteltyjä). Jos ei voida laskea, niin perustele lyhyesti, miksi ei voida.

$$\nabla \bullet (\nabla \bullet \mathbf{F}), \quad \nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}), \quad \nabla \times (\nabla \bullet \mathbf{F}), \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$$

b) Laske $\nabla \bullet r^3\mathbf{r}$ (kun $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ja r on vektorin $\mathbf{r}$ pituus).

2. Olkoon $\mathbf{F}(x,y) = (y-x, 2x-y)$ ja C kiekonpuolikkaan $0 \le y \le \sqrt{25-x^2}$ reuna suunnistettuna vastapäivään. Laske

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

3. Olkoon S kartion $z = \sqrt{x^2+y^2}$ se osa, joka on pintojen $z=1$ ja $z=4$ välissä. Laske funktion $f(x,y,z) = x^2 z$ pintaintegraali yli pinnan S.

4. Olkoon $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ja

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \le 4, \ 0 \le z \le h\}.$$

Totea Gaussin lauseen (eli divergenssilauseen) paikkansapitävyys tässä tapauksessa laskemalla lauseen molempien puolien integraalit.

Tehtäväkohtaiset tulokset julkaistaan POPissa periodin 4/2010–2011 toteutuskerran sivulla elokuun puoliväliin mennessä.

MAT-20401 Vektorianalyysi, tentin kaavaliite

1. (1) $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$

(2) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

(3) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$

(4) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$

(5) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F})$

(6) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$

(7) $\nabla \cdot (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{G} + f(\nabla \cdot \mathbf{G})$

(8) $\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$

(9) $\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

2. $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{n}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}, \quad \kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \dfrac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{v^3},$

$a_T = v', \quad a_n = \kappa v^2$

3. $$\oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

4. $$\oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dx\, dy$$

5. $$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

6. $$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

7. $$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \implies dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

8. $\mathbf{N}(\phi, \theta) = a^2 \sin\phi\, (\sin\phi \cos\theta,\ \sin\phi \sin\theta,\ \cos\phi), \quad \|\mathbf{N}(\phi, \theta)\| = a^2 \sin\phi$

9. $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t, \qquad \sin^2 t = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2}, \qquad \cos^2 t = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$