TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-20401 Vektorianalyysi
Tentti 12.5.2011

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite on ohessa.

1. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ käyräintegraali yli käyrän $x^2 + y^2 = 1$ vastapäivään pisteestä $(1, 0)$ pisteeseen $(0, 1)$.

2. Olkoon R se xy-tason kolmio, jolla on kärkipisteinä $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(1, 2)$. Laske pinnan $z = x^2 + 2y$ sen osan pinta-ala, joka on kolmion R yläpuolella (ts. pinnan $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + 2y, \ (x, y) \in R\}$ pinta-ala).

3. Olkoon S kartion $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ se osa, joka on tason $z = 1$ alapuolella. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^4\mathbf{k}$ vuo pinnan S läpi z-akselista poispäin.

4. Laske Stokesin lauseen avulla

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

kun $\mathbf{F}(x, y, z) = (z + \sin x)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j} + (y + e^z)\mathbf{k}$ ja C on kartion $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja tason $z = 1/2$ leikkauskäyrä suunnistettuna ylhäältä katsoen vastapäivään.

Tehtäväkohtaiset tulokset julkaistaan POPissa periodin 4/2010–2011 toteutuskerran sivulla.

MAT-20401 Vektorianalyysi, tentin kaavaliite

1. (1) $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$
   (2) $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
   (3) $\nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F}$
   (4) $\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G})$
   (5) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \bullet \mathbf{G}) - (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \bullet \mathbf{F})$
   (6) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$
   (7) $\nabla \bullet (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \bullet \mathbf{G} + f(\nabla \bullet \mathbf{G})$
   (8) $\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$
   (9) $\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

2. $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{n}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}, \quad \kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \dfrac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{v^3},$

   $a_T = v', \quad a_n = \kappa v^2$

3. $\displaystyle\oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$

4. $\displaystyle\oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \bullet \mathbf{F}\, dx\, dy$

5. $\displaystyle\iint_{\partial T} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS = \iiint_T \nabla \bullet \mathbf{F}\, dV$

6. $\displaystyle\oint_{\partial S} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, dS$

7. $\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \implies dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

8. $\mathbf{N}(\phi, \theta) = a^2 \sin\phi\,(\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi), \qquad \|\mathbf{N}(\phi,\theta)\| = a^2\sin\phi$

9. $\sin(2t) = 2\sin t\cos t, \qquad \sin^2 t = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2}, \qquad \cos^2 t = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$