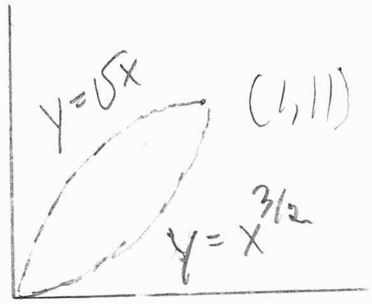
MAT-20400 Vektorianalyysi
Tentti 23.10.2009
Ei laskimia, taulukot jaetaan

1. (i) Laske $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, kun $\mathbf{F} = [3x^2 + y,\ -yz,\ 2xyz]$ ja C on $\mathbf{r}(t) = (t, \sqrt{t}, 1/\sqrt{t})$ missä $t \in [1,2]$.

(ii) Olkoon $\mathbf{F}(x,y) = \left(xy + x + y^2, x^2 - x + 1\right)$ ja käyrä C kuten kuvassa. Laske $\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$.



2. (i) Määrää $\mathbf{F} = (yz+1)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ skalaaripotentiaali (mikäli on olemassa).

(ii) Laske $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, kun C on jana pisteestä (1, 1, 1) pisteeseen $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$. (**F** (i)-kohdasta)

3. Laske vektorikentän $\mathbf{F} = [2xy, x^2 - y^2, -3z]$ vuo puolipallon

$$R = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4, z \geq 2\right\}$$

pinnan läpi. (Huom! Vain puolipallon pinta).

4. Olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + 5xz\mathbf{j} - 3xyz\mathbf{k}$.

Laske $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$, kun **n** on S:n yksikkönormaali, jonka **k** koordinaatti on positiivinen (pinnan yläpuoli on positiivinen puoli) ja S on puolipallon pinta:

$x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 4 \qquad z \geq -3$.

Jussi-Pekka Teini
jussi-pekka.teini@tut.fi

MAT-20400 Vektorianalyysi, kokeen kaavaliite

1. (1) $\nabla \times \nabla f = 0$
   (2) $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
   (3) $\nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F}$
   (4) $\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G})$
   (5) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \bullet \mathbf{G}) - (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \bullet \mathbf{F})$
   (6) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$
   (7) $\nabla \bullet (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \bullet \mathbf{G} + f(\nabla \bullet \mathbf{G})$
   (8) $\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$
   (9) $\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

2. $\displaystyle \int_C f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$

3. $\displaystyle \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\, ds = \int_C f_1\, dx + \int_C f_2\, dy + \int_C f_3\, dz$

4. $\displaystyle \oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\, dy$

5. $\displaystyle \oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) dx\, dy$

6. $\displaystyle \iint_S f\, dS = \iint_R f(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)\|\, du\, dv$

7. $\displaystyle \iint_S f\, dS = \iint_R f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$

8. $\displaystyle \iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \bullet [\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)]\, du\, dv$

9. $\displaystyle \iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS = \iint_R \mathbf{F}(x,y,z(x,y)) \bullet \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) dx\, dy$

10. $\displaystyle \iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS = \iiint_T \nabla \bullet \mathbf{F}\, dV$

11. $\displaystyle \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, dS$

12. $\displaystyle f(\mathbf{r}) = \int_{A_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$

13. $$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \implies dV = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$\sin(2t) = 2\sin t \cos t \qquad \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2} \qquad \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

Janne Määttä
janne.maatta@tut.fi

MAT-20400 Vektorianalyysi
tentti 07.10.2008
Ei laskimia, taulukot jaetaan

1. Laske $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, kun $\mathbf{F} = [xy, x^2 - y, x^2 y\sqrt{z}]$ ja C on
$\mathbf{r}(t) = [-\sqrt{t}, 2t, t^2]$, $t \in [1, 2]$

2. (i) Määrää f(z) siten,että vektorikentällä
$\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + (\sin z + x^2 y)\mathbf{j} + yf(z)\mathbf{k}$
on skalaaripotentiaali .
(ii) Laske $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, kun C on jana pisteestä
$(0,1,-\pi/2)$ pisteeseen $(1,1,\pi/2)$
(**F** (i)-kohdasta).

3. Laske vektorikentän $\mathbf{F} = [2xy, x^2 - y^2, -3z]$
vuo puolipallon

$$R = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4, z \geq -2\right\}$$

pinnan läpi. (Huom! Vain puolipallon pinta).

4. Olkoon $\mathbf{F} = [zy - e^x, xz^2 + \ln(y), x\cos(y)]$.

Laske $\int_C \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$, , kun **n** on pinnan S
yksikkönormaali, ja pinnan positiivinen puoli
on yläpuoli ja S on puolipallon pinta:
$x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 4$, missä $z \geq -3$.

$z = 2 - 3 = -1$

MAT-20400 Vektorianalyysi Tehtävät 1-4
73040 Vektorianalyysi tehtävät 1-5
tentti 15.1.2007
Ansaitut bonuspisteet saat palauttamalla tehtäväpaperin ao. luennoitsijalle (Kauhanen 1. jakso, Pirttimäki 2. jakso).
Ei laskimia, taulukot jaetaan

1. (i) Laske $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$,kun $\mathbf{F} = [3x^2 + y,\ -yz,\ 2xyz]$ ja C on
on $\mathbf{r}(t) = [t^3, t^2, t]$. $t \in [0, 1]$

(ii) Laske $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, kun $\mathbf{F} = [\cos y, \sin x]$ (siis integraali yli S:n reunan),
kun S on $S = \{(x, y) : 0 \le x \le \pi/4, 0 \le y \le \pi/3\}$.

2. (i) Määrää kentän $\mathbf{F} = y^2 z^4 \mathbf{i} + 2xyz^4 \mathbf{j} + 4xy^2 z^3 \mathbf{k}$ skalaaripotentiaali (mikäli on olemassa).

(ii) Laske $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, kun C on $\mathbf{r}(t) = [-t, \sqrt{t}, \sqrt{t}]$, $t \in [1, 2]$,
($\mathbf{F}$ (i)-kohdasta).

(iii) Olkoon $\mathbf{r} = (x,y,z)$ ja $r = \|\mathbf{r}\|$ ja $\mathbf{a}$ vakiovektori.
Laske $\nabla \bullet (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$ ja $\nabla \bullet (r^2 \mathbf{r})$

3. (i) Laske pintaintegraali

$$\iint_S (x - 2xy)\, d\partial \quad \text{,missä}$$

$S = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, z = x^2\}$.

(ii) Laske vektorikentän $\mathbf{F} = (x + z, y, z - x)$ vuo puolipallon

$$R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1,\ z \ge 2\}$$

pinnan läpi. (Huom! Vain puolipallon pinta).

4. Olkoon $\mathbf{F} = yze^{xy}\, \mathbf{i} + xz(1 + e^{xy})\, \mathbf{j} + e^{xy}\, \mathbf{k}$.

Laske $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$ ($\iint_S (\nabla \times F) \bullet \mathbf{n} ds$), kun $\mathbf{n}$ on S:n yksikkönormaali, ja pinnan positiivinen puoli on alapuoli ja S on puolipallon pinta:

$$x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 4, \qquad -3 \ge z .$$

5. (i) Pallon muotoisen säiliön halkaisija on 10 m. Mikä on vesimäärän tilavuus, kun veden syvyys (= pinnan ja pallon pohjan alimman kohdan välinen etäisyys) on 2m.
(Ohje: sylinterikoordinaatit ja pallo sopivaan asemaan.)

(ii) Laske $\iint_R \exp\left(\dfrac{x - y}{x + y}\right) dx\, dy$, missä R on kolmio, jonka kärkipisteet ovat (0,0), (0,1), (1,0).

MAT-20400 Vektorianalyysi
Tentti 11.10.2006

- Ei laskinta eikä taulukkokirjoja.
- Kirjoita jokaiseen vastauspaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ja koulutusohjelmasi.
- Jos käytät bonuksia periodin 5/2005-6 kurssilta, niin kirjoita vastauspaperiin "Periodi 5".

1. Olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$. Laske

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

pisteestä $(2, 0, 4)$ pisteeseen $(-2, 0, 8)$ sylinterin $x^2+y^2 = 4$ ja tason $x+z = 6$ leikkauskäyrää pitkin, kun kierretään z-akselia positiiviseen kiertosuuntaan (ts. ollaan joukossa $y \geq 0$).

2. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, 0, x^2)$ vuo "ylöspäin" pinnan $z = x^2 + y^2$ sen osan läpi, jolle $-1 \leq x \leq 1$ ja $-1 \leq y \leq 1$.

3. Laske kentän $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = r\mathbf{r}$ vuo "onton pallon puolikkaan"

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \ z \geq 0\}$$

reunapinnan läpi kappaleesta T poispäin. Tässä $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ja $r = \|\mathbf{r}\|$.

4. a) Anna pinnalle

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 9 - x^2 - y^2, \ z \geq 0\}$$

parametrisointi $\mathbf{r}(r, \theta)$ napakoordinaatteja r ja θ käyttäen. Anna myös parametriavaruus R (ts. parametrien rajat).

b) Laske a-kohdan parametrisoinnin antama normaalivektori $\mathbf{N}(r, \theta)$.

c) Laske pinnan S pinta-ala a-kohdan parametrisointia käyttäen.