

MAT-13530 Laaja matematiikka 3u

Tentti 05.03.2012

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!
Kaavakokoelma jaetaan!

1. Laske oheiset integraalit:

a) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ b) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{8x-x^2}} dx.$

2. Tutki, suppeneeko integraali ja myönteisessä tapauksessa laske sen arvo:

a) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ b) $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx.$

3. a) Ratkaise funktiota $y(x)$ koskeva alkuarvoprobleema

$$y' = (1 + y^2)e^x, \quad y(0) = 1.$$

b) Ratkaise alkuarvoprobleema

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Tutki alla olevista sarjoista, onko kyseessä suppeneva, itseisesti suppeneva, ehdollisesti suppeneva vai hajaantuva sarja:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k^2}{k^2 + 1}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k}{k^2 + 1}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2 + 1}.$

5. a) Määritä kaikki pisteet $x \in \mathbb{R}$, joissa potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 3}} x^k$ suppenee.

b) Muodosta funktion $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ Taylorin sarja (kolme ensimmäistä nollasta eroavaa termiä riittää).