



MAT-13510 Laaja matematiikka 1U, Tentti 15.10.2012

Tentaattori: Simo Ali-Löytty

Ohjeet: Ei laskimia, eikä muistiinpanoja. Kaavakokoelma

"Insinöörimatematiikka 1u" on paperin kääntöpuolella.

Kirjoita pääkonseptiin neljä

2×2 -ruudun kokoista neliötä:

Jokainen tehtävä tehdään omalle sivulle / omille sivuille.

Kirjoita vastauksien perustelut ja välivaiheet näkyviin!

1. Ratkaise kaikki kompleksiluvut $z \in \mathbb{C}$, jotka toteuttavat yhtälön $z^4 + 4 = 0$.
Anna vastaukset muodossa $z = x + iy$, missä $x, y \in \mathbb{R}$ ovat sievennetyssä muodossa.
2. (a) Osoita, että kaikille luonnollisille luvuille $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\sum_{i=1}^n 4i = 2n(n+1).$$

- (b) Osoita, että $-1 \cdot x = -x$ kaikilla kunnan alkioilla x . Käytä vain kunta-aksioomia ja tietoa, että $0 \cdot x = 0$ kaikilla kunnan alkioilla x .
3. Osoita raja-arvon määritelmää käyttäen, että $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 2) = 2$.
Toisin sanoen todista kyseinen raja-arvo $\varepsilon - \delta$ -todistuksella.
4. Olkoon $f(x) = e^{|\sin(x)|}$ reaalifunktio.
 - (a) Mikä on reaalifunktion f laajin mahdollinen määrittelyjoukko. (max. 2 pistettä)
 - (b) Laske derivaatan avulla funktion f kriittiset pisteet. (max. 4 pistettä)

Kunta-aksioomat:

Joukko $\mathbb{R}$ varustettuna yhteenlaskulla $+$ ja kertolaskulla $\cdot$ on kunta, jos se toteuttaa seuraavat aksioomat. Olkoon seuraavassa $x, y, z \in \mathbb{R}$.

K1: $x + y = y + x$ (yhteenlaskun vaihdantalaki)

K2: $x + (y + z) = (x + y) + z$ (yhteenlaskun liitälaki)

K3: On olemassa $0 \in \mathbb{R}$ s.e. $x + 0 = x$ (yhteenlaskun neutraalialkion olemassaolo)

K4: Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on olemassa *vastaluku* $y \in \mathbb{R}$ s.e. $x + y = 0$, merkitään $y = -x$.

K5: $x \cdot y = y \cdot x$ (kertolaskun vaihdantalaki)

K6: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (kertolaskun liitälaki)

K7: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (osittelulaki)

K8: On olemassa $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, s.e. $1 \cdot x = x$ (kertolaskun neutraalialkion olemassaolo)

K9: Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $x \neq 0$ on olemassa *käänteisluku* $y \in \mathbb{R}$ s.e. $x \cdot y = 1$, merkitään $y = \frac{1}{x}$ tai $y = x^{-1}$.