TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO Mikko Eronen

MAT-10432 Insinöörimatematiikka B 3u
Tentti 28.3.2011

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite ohessa.

1. Integroi

$$\int \frac{2x}{(x-1)(x^2+1)}\, dx.$$

2. a) Muodosta funktion $f(x) = \ln x$ kolmannen asteen Taylorin polynomi pisteen 1 suhteen.

b) Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{1+2^n}\ ?$$

3. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' = \frac{2x}{y^2}, \quad y(1) = -1.$$

4. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y''' + y'' - 6y' = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 3.$$

Tehtäväkohtaiset tulokset julkaistaan POPissa toteutuskerran sivulla.

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-10432 Insinöörimatematiikka B 3u
Tentin kaavaliite (periodi 3/2010–2011)

1. Integrointikaavoja

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{ar\,sinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{ar\,cosh} x + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{ar\,tanh} x + C = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} + C$

2. $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

3. $s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,$

$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$

4. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

5. Maclaurinin sarjoja:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

6. $y' + a(x)y = f(x):\ y(x) = e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)} f(x)\,dx + C\right)$

7. $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 = 0$:
$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

(1) yksinkertainen reaalijuuri λ: ratkaisu $e^{\lambda x}$

(2) yksinkertainen imaginaarijuuripari $\lambda = \alpha \pm \beta i$: ratkaisut $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ ja $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

(3) k-kertainen reaalijuuri λ: ratkaisut $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$

(4) k-kertainen imaginaarijuuripari $\lambda = \alpha \pm \beta i$: ratkaisut
$e^{\alpha x}\sin(\beta x), xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
$e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

8. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}:\ \mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c},\ X(t) = [\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}\ \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \cdots \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}]$

9. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$: ratkaisut $\operatorname{Re}\left(\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}\right), \operatorname{Im}\left(\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}\right)$