

MAT-10422 Insinöörimatematiikka B 2u

Tentti 12.12.2014

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia esillä.

1. a) Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Ratkaise X yhtälöstä $A^T X B + 3B = I$.

b) Laske $\mathbb{R}^3$:n suoran $L: \mathbf{x} = (1, -1, 2) + t(1, 1, 3)$, $t \in \mathbb{R}$ ja tason $T: x_1 + x_2 - x_3 = 2$ leikkauspiste tai osoita, että sellaista ei ole.

2. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

a) Mitä on $\text{rank}(A)$?

b) Laske $\det(A)$. Onko A kääntyvä?

c) Hae yhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} = [1 \ -1 \ 0]^T$ kaikki ratkaisut, tai osoita, että ratkaisuja ei ole.

3. Hae matriisin $M = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja vastaavat ominaisvektorit

(ominaisavaruuksien kannat). Mitä ovat M :n ominaisarvojen algebralliset ja geometriset kertaluvut? Onko matriisi M diagonalisoituva? Jos on, niin diagonalisoi M .

4. a) Olkoon $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ lineaarisesti riippumaton vektorijoukko.

Onko $\{\mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ lineaarisesti riippuva vai riippumaton? (Perustelut!)

b) Ovatko vektorit $(0, 3, 2, 0)$, $(1, 1, 1, -1)$, $(2, 0, 1, 5)$, $(1, 2, 3, 3)$, $(1, 2, 3, 4)$ lineaarisesti riippuvia vai riippumattomia?

c) Olkoon H avaruuden $\mathbb{R}^n$ jokin ei-triviaali aliavaruus. Määritä kaikki sellaiset vektorit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, joille pätee $\text{proj}_H \mathbf{v} = \text{perp}_H \mathbf{v}$.