Mikko Joensuu

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-10342 Insinöörimatematiikka B 4
Tentti 24.5.2010

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite ohessa.

1. Selvitä perustellen potenssisarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+2}{2} \right)^n$$

suppenemisväli.

2. Tarkastellaan ruuvikäyrää $\mathbf{r}(t) = (2t, \cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
a) Laske yksikkötangentti ja päänormaali käyrän pisteeseen $(2\pi, -1, 0)$.
b) Missä käyrän pisteissä (x, y, z) käyrällä on xy-tason suuntainen tangenttisuora?

3. Olkoon $f(x, y, z) = xy + yz$, $\mathbf{p} = (1, -1, 2)$ ja $\mathbf{u} = (3, 6, -2)$. Laske suunnattu derivaatta $D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{p})$ suuntaan $\mathbf{e} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$
a) gradienttia käyttäen,
b) suunnatun derivaatan määritelmän avulla.

4. Tutki, onko funktiolla $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$ suurinta ja pienintä arvoa 1. koordinaattineljänneksessä

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0\}.$$

Jos on, niin mitkä ko. pienin ja suurin arvo ovat ja missä pisteissä ne saavutetaan?

Tehtäväkohtaiset tulokset julkaistaan POPissa periodin 4/2009–2010 toteutuskerran pääsivulla.

MAT-10342 Insinöörimatematiikka B 4 (2010) kaavaliite

1. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

2. $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}, \quad \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{v^3}$

3. $s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$

4. $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T Hf(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})$

5. $Hf(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1D_1f(\mathbf{x}) & D_1D_2f(\mathbf{x}) & \cdots & D_1D_nf(\mathbf{x}) \\ D_2D_1f(\mathbf{x}) & D_2D_2f(\mathbf{x}) & \cdots & D_2D_nf(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_nD_1f(\mathbf{x}) & D_nD_2f(\mathbf{x}) & \cdots & D_nD_nf(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$

6. $f(a+h, b+k) \approx \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)$

7. $\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases}$

8. $\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \\ \nabla f = \lambda\nabla g + \mu\nabla h \end{cases}$

9. $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{m-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad A^T A\mathbf{b} = A^T\mathbf{y}$

10. $\mathbf{n}\bullet(\mathbf{x}-\mathbf{p}) = 0, \qquad \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}}{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}}\mathbf{u}$

11. Maclaurinin sarjoja:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k \qquad (-1 < x \le 1)$$