MAT-02650 Algoritmimatematiikka / Hirvonen

Tentti 21.10.2016

Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

1. Olkoon $A = \{1, 3, 6, 8\}$. Määritellään joukossa $A \times A$ relaatiot R ja S siten, että

$$aRb \quad \text{jos ja vain jos} \quad b \text{ on luvun } a \text{ tekijä eli } b|a$$
$$aSb \quad \text{jos ja vain jos} \quad a \,\mathrm{mod}\, \mathrm{b} \neq 0$$

   (a) Esitä alkioittain joukko $R^{-1} \cap S$.

   (b) Muodosta yhdistetty relaatio $R \circ S$. Onko se refleksiivinen? Onko symmetrinen? Onko transitiivinen?

2. (a) Olkoon $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Onko funktio $f : A \to A$, $f(x) = (5x) \,\mathrm{mod}\, 6$ injektio? Entä surjektio?

   (b) Merkitään $+(x, y) = x + y$ ja $\mathrm{div}(x, y) = \frac{x}{y}$. Sievennä (kaikki välivaiheet esittäen) $f(3, 4)$, kun

$$f = \mathrm{div} \circ \langle + \circ \langle \mathrm{div}, \mathrm{div} \circ \langle \mathbf{2}, \mathbf{1} \rangle \rangle, \mathbf{1} \rangle .$$

3. Alla on erään teorian inferenssitodistus ilman perusteluita. Kopioi tämä vastauspaperiisi ja täydennä puuttuvat perustelut. Mikä teoria tässä on todistettu?

1.	$A \to B$	________
2.	$B \to C$	________
3.	$\quad\quad \neg(A \to C)$	________
4.	$\quad\quad A \wedge \neg C$	________
5.	$\quad\quad A$	________
6.	$\quad\quad B$	________
7.	$\quad\quad \neg C$	________
8.	$\quad\quad \neg B$	________
9.	$\quad\quad B \wedge \neg B$	________
10.	$\quad\quad \mathbf{e}$	________
11.	$A \to C$	
M.O.T.		1.,2.,11. CP

4. (a) Todista, että kahden peräkkäisen kokonaisluvun summa on parillinen.

   (b) Todista induktiotodistuksella, että $n(n+1)(n+2)$ on jaollinen kuudella kaikille $n \in \mathbb{N}$.

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio	Ekvivalenssi
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$	$p \rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
	$p \vee \mathbf{e} = p$	$p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \rightarrow \mathbf{e} = \neg p$	
	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$	$\mathbf{t} \rightarrow p = p$	
	$p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \rightarrow p = \mathbf{t}$	**De Morganin lait**
			$p \rightarrow p = \mathbf{t}$	$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$
			$p \rightarrow q = \neg p \vee q$	$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$
			$p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$	

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q = q \vee p$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Inferenssisääntöjä

MP	**MT**	**Conj**	**Simp**
$\dfrac{A,\ A \rightarrow B}{\therefore B}$	$\dfrac{A \rightarrow B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	$\dfrac{A,\ B}{\therefore A \wedge B}$	$\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add	**DS**	**HS**	
$\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$	$\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{\therefore A}$	$\dfrac{A \rightarrow B,\ B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$	

muista rajoitukset

UI	**UG**	**EG**	**EI**
$\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	$\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x\, A(x) \rightarrow \exists x\, B(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x,y) = \forall y\, \forall x\, W(x,y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x,y) = \exists y\, \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \vee A(x)) = C \vee \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \vee A(x)) = C \vee \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \rightarrow C) = \exists x\, A(x) \rightarrow C$	$\exists x\, (A(x) \rightarrow C) = \forall x\, A(x) \rightarrow C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$	$\forall x\, (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \rightarrow \forall x\, B(x)$
$\exists y\, \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x,y)$	