

Tentti(2) MAT-02650 Algoritmimatematiikka

18.8. 2015 Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta. HUOM. Tehtävät EIVÄT ole vaikeusjärjestyksessä!

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi.

Muistathan antaa palautetta Kaiku-järjestelmän kautta saadaksesi opintosuorituksen.

- (a) (3 pistettä) Osoita, että relaatio $R \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, joko on tai ei ole ekvivalenssirelaatio, kun relaatio R määritellään aRb joss $a - b \in \mathbb{Z}$.
(b) (3 pistettä) Muuta lause $p \rightarrow (q \wedge \neg p)$ täyteen konjunkttiiviseen normaalimuotoon (CNF)
2. Vastaa lyhyesti (kyllä/ei) kohtien (a)-(f) kysymyksiin. Jokaisen kohdan oikeasta vastauksesta saat yhden pisteen, väärästä vastauksesta vähennetään yksi piste ja vastaamatta jättäminen on nolla pistettä. Tehtävän kokonaispistemäärä ei kuitenkaan mene negatiiviseksi. Tarkastellaan joukkoa

$$A = \{\langle n, -n \rangle : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

- Onko joukko A karteeminen tulo joukossa $\mathbb{Z}$?
 - Onko joukko A relaatio?
 - Onko joukko A ekvivalenssirelaatio?
 - Onko joukko A funktio?
 - Onko joukko A injektio?
 - Onko joukko A surjektio?
3. Osoita tautologioita ja päättelysääntöjä käyttäen (ilman totuustaulua), että

$$\left((A \vee B \vee C) \wedge (A \rightarrow (B \vee C)) \wedge (\neg C) \right) \rightarrow B$$

on pätevä teoria.

4. (a) (2 pistettä) Esitä funktio

$$f(x) = \sin(x^2 - x)$$

prefix- eli ulkomuodossa (muuttuja/muuttujat annetaan vain kerran).

- (b) (2 pistettä) Näytä, että $n \ln(n) = o(n^2)$.
- (c) (2 pistettä) Osoita, että

$$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A \cup \overline{A} \cup \overline{B}}) = \emptyset$$

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio	Ekvivalenssi
$\neg\neg p = p$	$p \vee t = t$ $p \vee e = p$ $p \vee p = p$ $p \vee \neg p = t$	$p \wedge t = p$ $p \wedge e = e$ $p \wedge p = p$ $p \wedge \neg p = e$	$p \rightarrow t = t$ $p \rightarrow e = \neg p$ $t \rightarrow p = p$ $e \rightarrow p = t$ $p \rightarrow p = t$ $p \rightarrow q = \neg p \vee q$ $p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$	$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$ $p \vee q = q \vee p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

Inferenssisääntöjä

MP $\frac{A, A \rightarrow B}{\therefore B}$	MT $\frac{A \rightarrow B, \neg B}{\therefore \neg A}$	Conj $\frac{A, B}{\therefore A \wedge B}$	Simp $\frac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\frac{A}{\therefore A \vee B}$	DS $\frac{A \vee B, \neg B}{\therefore A}$	HS $\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$	

muista rajoitukset

UI $\frac{\forall x W(x)}{\therefore W(t)}$	UG $\frac{W(t)}{\therefore \forall x W(x)}$	EG $\frac{W(t)}{\therefore \exists x W(x)}$	EI $\frac{\exists x W(x)}{\therefore W(t)}$
---	---	---	---

Ekvivalensseja

$\neg\forall x W(x) = \exists x \neg W(x)$ $\exists x (A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ $\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ $\exists x \exists y W(x, y) = \exists y \exists x W(x, y)$	$\neg\exists x W(x) = \forall x \neg W(x)$ $\forall x (A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ $\forall x \forall y W(x, y) = \forall y \forall x W(x, y)$
---	--

$\forall x (C \vee A(x)) = C \vee \forall x A(x)$ $\exists x (C \vee A(x)) = C \vee \exists x A(x)$ $\forall x (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \forall x A(x)$ $\forall x (A(x) \rightarrow C) = \exists x A(x) \rightarrow C$	$\forall x (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x A(x)$ $\exists x (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x A(x)$ $\exists x (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \exists x A(x)$ $\exists x (A(x) \rightarrow C) = \forall x A(x) \rightarrow C$
--	--

Implikaatioita

$\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$ $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$ $\exists y \forall x W(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y W(x, y)$	$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$
---	--