MAT-02650 Algoritmimatematiikka / Hirvonen

Tentti 14.10.2014

Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

1. Olkoon $A = \{1, 3, 6, 8\}$. Määritellään joukossa $A \times A$ relaatiot R ja S siten, että

$$aRb \quad \text{jos ja vain jos} \quad b \text{ on luvun } a \text{ tekijä eli } b|a$$

$$aSb \quad \text{jos ja vain jos} \quad a \bmod b \neq 0$$

   (a) Esitä alkioittain joukko $R^{-1} \cap S$.

   (b) Muodosta yhdistetty relaatio $R \circ S$. Onko se refleksiivinen? Onko symmetrinen? Onko transitiivinen?

2. Onko alla esitetty $f : \left(-\frac{5}{2}, \infty\right) \to \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ injektio? Entä surjektio? Jos on, perustele asiaa injektion ja surjektion määritelmien mukaisesti. Jos f on bijektio, esitä käänteisfunktion lauseke.

$$f(x) = \frac{3x}{2x + 5}.$$

3. (a) Todista, että jos $n \in \mathbb{N}$, niin 4 on luvun $1 + (-1)^n (2n - 1)$ tekijä.

   (b) Olkoon $a \in \mathbb{Q}$ ja $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Todista <u>epäsuoralla todistuksella</u>, että $a + b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

4. Todista alla oleva teoria loogisen päättelyn keinoin ILMAN totuustaulua.

$$(A \to (B \vee C)) \wedge (B \to C) \to (A \to C).$$

$$1 + (-1)^n(2n-1) = 1 + (-1)^n 2n - (-1)^n = 1 + (-1)^n 2n + (-1)(-1)^n$$
$$= 1 + (-1)^n \cdot 2n + (-1)^{n+1}$$

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$ $p \vee \mathbf{e} = p$ $p \vee p = p$ $p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$ $p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$ $p \wedge p = p$ $p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$p \to \mathbf{t} = \mathbf{t}$ $p \to \mathbf{e} = \neg p$ $\mathbf{t} \to p = p$ $\mathbf{e} \to p = \mathbf{t}$ $p \to p = \mathbf{t}$ $p \to q = \neg p \vee q$ $p \to q = \neg q \to \neg p$ $\neg(p \to q) = p \wedge \neg q$

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q = q \vee p$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$ $p \vee (p \wedge q) = p$ $p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$ $p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP $\dfrac{A,\ A \to B}{\therefore B}$	**MT** $\dfrac{A \to B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	**Conj** $\dfrac{A,\ B}{\therefore A \wedge B}$	**Simp** $\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$	**DS** $\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{\therefore A}$	**HS** $\dfrac{A \to B,\ B \to C}{\therefore A \to C}$	

muista rajoitukset

UI	**UG**	**EG**	**EI**
$\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	$\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$ $\exists x\, (A(x) \vee B(x)) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$ $\exists x\, (A(x) \to B(x)) = \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$ $\exists x\, \exists y\, W(x,y) = \exists y\, \exists x\, W(x,y)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$ $\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$ $\forall x\, \forall y\, W(x,y) = \forall y\, \forall x\, W(x,y)$

$\forall x\, (C \vee A(x)) = C \vee \forall x\, A(x)$ $\exists x\, (C \vee A(x)) = C \vee \exists x\, A(x)$ $\forall x\, (C \to A(x)) = C \to \forall x\, A(x)$ $\forall x\, (A(x) \to C) = \exists x\, A(x) \to C$	$\forall x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x\, A(x)$ $\exists x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x\, A(x)$ $\exists x\, (C \to A(x)) = C \to \exists x\, A(x)$ $\exists x\, (A(x) \to C) = \forall x\, A(x) \to C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$ $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$ $\exists y\, \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x,y)$	$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$ $\forall x\, (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$

$(\neg B \vee C) \wedge (B \vee C)$

$(C \vee \neg B) \wedge (C \vee B)$

$C \vee (\neg B \wedge B)$