

Tentti(1) MAT-02650 Algoritmimatematiikka

9.5. 2017 Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta. HUOM. Tehtävät EIVÄT ole vaikeusjärjestyksessä!

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi.

Muistathan antaa palautetta Kaiku-järjestelmän kautta saadaksesi opintosuorituksen.

1. (a) (3 pistettä) Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$ ja $R : A \leftrightarrow A$, $S : A \leftrightarrow A$, $T : A \leftrightarrow A$, missä

$$R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}, S = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\} \text{ ja } T = \{\langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}.$$

Laske

$$|(R \circ S) \cap (R \circ T)|.$$

- (b) (3 pistettä) Tarkastellaan relaatiota $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$, missä aRb jos ja vain jos $a + b$ on parillinen. Jos R on ekvivalenssirelaatio, niin todista se tai jos R ei ole ekvivalenssirelaatio, niin todista se.

2. (a) (3 pistettä) Olkoon $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{N}_0$, ja $f(x) = \lfloor \log_2(x) \rfloor$.

- * Onko f injektio? (lyhyt perustelu)
- * Onko f surjektio? (lyhyt perustelu)
- * Laske $f(a)$, kun $a = 16\sqrt{2}$.

- (b) (3 pistettä) Muuta lause $\neg p \vee q$ täyteen (täydelliseen) disjunkttiiviseen normaalimuotoon (DNF).

3. (a) (3 pistettä) Osoita raja-arvotarkastelun avulla, että $(n^2 + 2)^2 = o(n^5)$.

- (b) (3 pistettä) Osoita määritelmän nojalla, että $n^3 - 4n + 2017 = \Omega(n^3)$.

4. Osoita tautologioita ja päättelysääntöjä käyttäen (ilman totuustaulua), että

$$\left((\neg C \vee \neg D) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow D) \right) \rightarrow \neg A \vee \neg B$$

on pätevä teoria.

KAAVOJA ON PAPERIN TOISELLA PUOLELLA.

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio	Ekvivalenssi
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$ $p \vee \mathbf{e} = p$ $p \vee p = p$ $p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$ $p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$ $p \wedge p = p$ $p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$p \rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}$ $p \rightarrow \mathbf{e} = \neg p$ $\mathbf{t} \rightarrow p = p$ $\mathbf{e} \rightarrow p = \mathbf{t}$ $p \rightarrow p = \mathbf{t}$ $p \rightarrow q = \neg p \vee q$ $p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$	$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Vaihdantalait	Liitântälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$ $p \vee q = q \vee p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$ $p \vee (p \wedge q) = p$ $p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$ $p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP $\frac{A, A \rightarrow B}{\therefore B}$	MT $\frac{A \rightarrow B, \neg B}{\therefore \neg A}$	Conj $\frac{A, B}{\therefore A \wedge B}$	Simp $\frac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\frac{A}{\therefore A \vee B}$	DS $\frac{A \vee B, \neg B}{\therefore A}$	HS $\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$	

muista rajoitukset

UI $\frac{\forall x W(x)}{\therefore W(t)}$	UG $\frac{W(t)}{\therefore \forall x W(x)}$	EG $\frac{W(t)}{\therefore \exists x W(x)}$	EI $\frac{\exists x W(x)}{\therefore W(t)}$
---	---	---	---

Ekvivalensseja

$\neg\forall x W(x) = \exists x \neg W(x)$ $\exists x (A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ $\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ $\exists x \exists y W(x, y) = \exists y \exists x W(x, y)$	$\neg\exists x W(x) = \forall x \neg W(x)$ $\forall x (A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ $\forall x \forall y W(x, y) = \forall y \forall x W(x, y)$
---	--

$\forall x (C \vee A(x)) = C \vee \forall x A(x)$ $\exists x (C \vee A(x)) = C \vee \exists x A(x)$ $\forall x (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \forall x A(x)$ $\forall x (A(x) \rightarrow C) = \exists x A(x) \rightarrow C$	$\forall x (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x A(x)$ $\exists x (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x A(x)$ $\exists x (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \exists x A(x)$ $\exists x (A(x) \rightarrow C) = \forall x A(x) \rightarrow C$
--	--

Implikaatioita

$\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$ $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$ $\exists y \forall x W(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y W(x, y)$	$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$
---	--