

MAT-02600 Diskreetti matematiikka

Tentti 17.10.2014 / Merja Laaksonen



- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
- Piirrä pääkonseptiin nimen alle peräkkäin neljä neliötä $a' 2 \times 2$.

1. (a) Määritä arvo lausekkeelle

$$\int_{-3}^3 \left(\left\lceil \frac{t+2}{2} \right\rceil H(t-2) + \frac{(1 + \text{signum}(t))\delta(t+1)}{-23} \right) dt.$$

(b) Etsi z-muunnos jonolle $\left\{ \frac{3}{4^k} - 3^k \cos(k\pi) \right\}$.

2. Systemiin menee sisään herätteenä jono $\{x_k\} = \{\sin(k\pi/2)\}$. Jonoon operoidaan ja ulostulevan jonon $\{y_k\}$ z-muunnos

$$Y(z) = \frac{3z}{4z^2 + 4} + \frac{z}{(3z + 1)(2z - 1)}.$$

(a) Määritä herätteen z-muunnos $X(z)$.

(b) Etsi siirtofunktio H sekä sen navat ja määritä $H(e^{j\pi/2})$.

(c) Mitä arvoja jonon $\{y_k\}$ jäsenet saavat, kun aikaa on kulunut "tarpeeksi"?

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{z \rightarrow 1} H(z) = 1/2$$

3. (a) Osoita, että jokaista luonnollista lukua n kohti

$$6 \mid (8^{2n+1} + 40^{2n}).$$

(b) Ratkaise kongruenssiyhtälö

$$82x \equiv 2 \pmod{46}.$$

4. (a) Osoita, että jokaista kokonaislukua k kohti $\text{synt}(4k + 3, 7k + 5) = 1$.

(b) Graafi $G = (V, E)$, missä $V = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$ ja

$$E = \{(v_1, v_6), (v_2, v_1), (v_6, v_2), (v_2, v_7), (v_7, v_8), (v_3, v_1), (v_5, v_3), (v_4, v_5), (v_6, v_5)\}.$$

i) Suorita syvyysetsintä graafille G aloittaen pisteestä v_5 . Esitä selkeästi etsinnän järjestys ja lopuksi DFS-puu havainnollisesti kuvana.

ii) DFS-puu on suunnattu puu. Onko sillä juuri? Jos on, niin mikä se on?

MAT-02600 Diskreetti matematiikka

Kaavakokoelma



Taulukko z-muunnoksista.

$x_k = ka^{k-1}$, a on vakio

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

$x_k = \cos(k\omega T)$, ω , T ovat vakioita

$$X(z) = \frac{z(z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \quad |z| > 1$$

$x_k = \sin(k\omega T)$, ω , T ovat vakioita

$$X(z) = \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \quad |z| > 1$$

Ominaisuudet:

$$1. \mathcal{Z}(\{x_{k-k_0}\}) = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}(\{x_k\})$$

$$2. \mathcal{Z}(\{x_{k+k_0}\}) = z^{k_0} X(z) - \sum_{p=0}^{k_0-1} x_p z^{k_0-p}$$

$$3. \mathcal{Z}(\{a^k x_k\}) = X(z/a)$$

$$4. \mathcal{Z}(\{t^n x_k\}) = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n X(z)$$

$$5. \mathcal{Z}(\{(x * y)_k\}) = \mathcal{Z}\left(\sum_{p=0}^k x_p y_{k-p}\right) = X(z)Y(z)$$