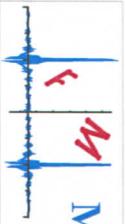


MAT-02450 Fourier'n menetelmät

Tentti 27.2.2017 / Merja Laaksonen



- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
Muista, että pistetet tulevat perusteltuista eikä arvauksista.

- Funktio f on määritelty yhtälöillä

$$\begin{cases} f(t) = 2, & \text{kun } 0 < t < 1, \\ f(t) = 0, & \text{kun } 1 < t < 4, \\ f(t+4) = f(t). \end{cases}$$

Laske näytelmän mukaisesti sille trigonometrinen Fourier-sarja.

- Vivian palla $y = 1 + 2t^2$, $t \in (0, 1)$ jaketaan parittomaksi funktioksi r ja sille

rakennetaan Fourier-sarja \hat{r} . Piirrä kuva.

- Onko \hat{r} sinisarja, kosinusarja vai ei kumpakaan? Miksi?
- Syntyykö Gibbsin ilmiötä? Jos syntyy, niin missä kohdissa?
- Minkä suorien $y = a$ ja $y = b$, $a, b \in \mathbb{R}$ välillä \hat{r} mahtuu? Kysessä on likiarvot, jotka eivät saa olla liian pieniä eikä turhan suuria.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\frac{1}{T} \int_d^{d+T} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-jn k \frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad g_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G_n e^{jn k \frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega u} du, \quad \mathcal{F}^{-1}\{F\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

$$\mathcal{F}\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \neq 0, \quad \mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega) = j\omega F(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\}(\omega) = e^{-j\omega a} F(\omega), \quad \mathcal{F}\{e^{jbt} f(t)\}(\omega) = F(\omega - b)$$

$$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\}(\omega) = F(\omega) G(\omega), \quad \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}(\omega) = \frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f\}(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{F(t)\}(\omega) = 2\pi f(-\omega), \quad (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dx.$$

- Jos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) e^{-|x|} dx = 2e^{-|t|} - e^{-2|t|},$$

niin mikä on funktio f . Vihje: Muuma yhtälö taajustasoon. Alla on kaavoja, joista voi olla apua.

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \text{ ja } \mathcal{F}\{H(t)e^{-at}\}(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \text{ missä } a > 0$$

Kaavakokoelma

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \quad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2} \left(\sin(x-y) + \sin(x+y) \right), \quad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2} \left(\cos(x-y) + \cos(x+y) \right),$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2} \left(\cos(x-y) - \cos(x+y) \right).$$

$$\hat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos(n\omega t + \theta_n)$$