MAT-02450 Fourier'n menetelmät

Tentti 27.2.2017 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
Muista, että pisteet tulevat perusteluista eikä arvauksista.

1. Funktio f on määritelty yhtälöillä

$$\begin{cases} f(t) = 2, & \text{kun } 0 < t < 1, \\ f(t) = 0, & \text{kun } 1 < t < 4, \\ f(t+4) = f(t). \end{cases}$$

Laske määritelmän mukaisesti sille trigonometrinen Fourier-sarja.

2. Viivan pala $y = 1 + 2t^2, t \in (0,1)$ jatketaan parittomaksi funktioksi r ja sille rakennetaan Fourier-sarja $\hat{r}$. Piirrä kuva.
a) Onko $\hat{r}$ sinisarja, kosinisarja vai ei kumpaakaan? Miksi?
b) Syntyykö Gibssin ilmiötä? Jos syntyy, niin missä kohdissa?
c) Minkä suorien $y = a$ ja $y = b$, $a, b \in \mathbb{R}$ väliin $\hat{r}$ mahtuu? Kyseessä on likiarvot, jotka eivät saa olla liian pieniä eikä turhan suuria.

3. Erään otoksen, jossa $T = 7$ ja näytteitä on otettu 0.5:n välein, DFT-jonon alku

$$\left\{0, -7, 1+j, \frac{-7j}{3}, 0, \frac{1-2j}{6}, 1, 0 \ldots\right\}.$$

a) Loppujono oli pyyhkiytynyt pois. Täydennä jonon loppu.
b) Mikä on arvio termille $|c_2|$ ja mitä taajuutta se vastaa?
c) DFT-jonon jäseniä voitaisiin laskea ääretön määrä. Mitä on G_{-5} ja G_{33}?

4. Jos

$$\int_{\infty}^{\infty} f(t-x)e^{-|x|}\,dx = 2e^{-|t|} - e^{-2|t|},$$

niin mikä on funktio f. *Vihje: Muunna yhtälö taajuustasoon. Alla on kaavoja, joista voi olla apua.*

$$\mathcal{F}\left\{e^{-a|t|}\right\}(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2} \text{ ja } \mathcal{F}\left\{H(t)e^{-at}\right\}(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}, \text{ missä } a > 0$$

Kaavakokoelma

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$, $\quad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big)$, $\quad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big)$,

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)$.

$$\hat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\Big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n|\cos(n\omega t + \theta_n)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt, && n = 0,1,2,3,\ldots \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt, && n = 1,2,3,\ldots \\ c_n &= \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)e^{-jn\omega t}\,dt, && n = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T}\int_d^{d+T} f^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}, \ n = 0,1,2,\ldots,N-1, \quad g_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} G_n e^{jnk\frac{2\pi}{N}}, \ k = 0,1,2,\ldots,N-1.$$

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u}\,du, \qquad \mathcal{F}^{-1}\{F\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega.$$

$\mathcal{F}\Big\{f(at)\Big\}(\omega) = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right), \ a \neq 0,$ $\qquad \mathcal{F}\Big\{f'(t)\Big\}(\omega) = j\omega F(\omega)$

$\mathcal{F}\Big\{f(t-a)\Big\}(\omega) = e^{-ja\omega}F(\omega),$ $\qquad \mathcal{F}\left\{e^{jbt}f(t)\right\}(\omega) = F(\omega - b)$

$\mathcal{F}\Big\{(f*g)(t)\Big\}(\omega) = F(\omega)G(\omega),$ $\qquad \mathcal{F}\Big\{f(t)g(t)\Big\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(F*G)(\omega)$

$\mathcal{F}\Big\{\mathcal{F}\{f\}(t)\Big\}(\omega) = \mathcal{F}\Big\{F(t)\Big\}(\omega) = 2\pi f(-\omega),$ $\qquad (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,dx.$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$$

$$\hat{F}(\omega) = h\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)e^{-j\omega kh}, \qquad \left\{\hat{F}_n\right\}_{n=0}^{N-1} = \left\{hG_n\right\}_{n=0}^{N-1}.$$