



MAT-02450 Fourier'n menetelmät

Tentti 11.3.2015 / Merja Laaksonen

- Ei muistutpanoja, kirjallisuutta, laskinta

1. Funktio f on määritelty yhtäöllä

$$\begin{cases} f(t) = e^{-t}, & \text{kun } 0 < t < 1, \\ f(t+1) = f(t). \end{cases}$$

Laske määritelmän mukaisesti sille kompleksinen Fourier-sarja.

2. Tehtävänä on rakentaa jaksottomalle funktiolle $f : f(t) = e^{-t}$ sellainen Fourier-sarja, että välillä $t \in (0, 1)$ funktio voidaan esittää sinisarjana. Sinun ei tarvitse laskea integraaleja, mutta esitä tarvittavat määrittäyt integraalit täsmällisesti selkäläisessä muodossa, josta tarvittaessa voisit ne laskea. Jos jonkin arvon näkee laskematta, niin sellaiset tiedysti esitetään.

Minkä suorien $y = a$ ja $y = b$ väliin sinisarjan kuvaaja mahtuu niin, että $|a-b|$ on mahdollisimman pieni?

3. Erään otoksen, jossa $T=6$ ja näytteitä on otettu 0.5:n välein, DFT-jonon alku on

$$\left\{ 5, 0, \frac{1+j}{3}, 1, 0, -3j, 0, \dots \right\}.$$

Loppujono oli pyyhkiytynyt pois. Täydennä jonon loppu. Esitä näiden tietojen avulla arvio lähtöfunktiota kuvaavalle sarjalle.

4. Jos

$$G(\omega) = \frac{3}{4 + \omega^2} \text{ ja } F(\omega) = \mathcal{F}\{\cos(2t)\}(\omega),$$

niin laske tulon $G(\omega)F(\omega)$ käänteismuunnos ja sievennä tulos reaaliseksi.

Pari muunnosta, joista on apua tai sitten ei:

$$1. \mathcal{F}\{1\}(\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad 2. \mathcal{F}\{e^{-|t|}\}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Kaavakokoelma

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), & \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \\ \sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)), & \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)), \\ \sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)). \end{aligned}$$

$$\hat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos(n\omega t + \theta_n)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \cos(n\omega t) dt, & n &= 0, 1, 2, 3, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \sin(n\omega t) dt, & n &= 1, 2, 3, \dots \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt, & n &= 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T} \int_d^{d+T} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-jn\frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad g_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G_n e^{jn\frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega u} du, \quad \mathcal{F}^{-1}\{F\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

$$\mathcal{F}\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \neq 0, \quad \mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega) = j\omega F(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\}(\omega) = e^{-j\omega a} F(\omega), \quad \mathcal{F}\{e^{j\omega t} f(t)\}(\omega) = F(\omega - b)$$

$$\mathcal{F}\{f * g\}(t)(\omega) = F(\omega)G(\omega), \quad \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}(\omega) = \frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f\}(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{F(t)\}(\omega) = 2\pi f(-\omega), \quad (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$\hat{F}(\omega) = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) e^{-j\omega kh}, \quad \{\hat{F}_n\}_{n=0}^{N-1} = \{hG_n\}_{n=0}^{N-1}.$$