



MAT-02450 Fourier'n menetelmät

Tentti 5.3.2014 / Merja Laaksonen

- Ei muistinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
- Kirjoita konsepteihin FM, nimesi ja numerosi
- Piirrä pääkonseptiin nimen alle peräkkäin neljä neliötä $a' 2 \times 2$.

--	--	--	--

1. Funktio f on määritelty yhtälöllä

$$\begin{cases} f(t) = t, & \text{kun } -\pi < t < \pi, \\ f(2\pi + t) = f(t). \end{cases}$$

Laske määritelmän mukaisesti sille trigonometrinen Fourier-sarja.

2. Funktion g Fourier-sarja kompleksisessa muodossa on

$$\hat{g}(t) = \frac{5(1-j)}{2}e^{-j3t} - 2 + \frac{5(1+j)}{2}e^{j3t}.$$

- Esitä sen ns. kolmas muoto.
- Laske funktion g keskimääräinen teho.

3. Erään otoksen DFT-jono on

$$\left\{ 4, 0, \frac{1}{4}j, 0, 0, 0, -\frac{1}{4}j, 0 \right\}.$$

Laske käänteismuunnoksen eli IDFT-jonon 4 ensimmäistä termiä. Sievennä tuloksesi.

4. Osoita, että

$$\mathcal{F}\{1\}(\omega) = 2\pi\delta(\omega).$$

Etsi sitä ja Fourier-muunnosten ominaisuuksia käyttäen

$$\mathcal{F}\{\cos(3t)\}(\omega).$$

Tehävän pisteet eivät tule ulkoa muistamisesta. Perustele joka vaiheessa, mikä on se ominaisuus kaavakokoelmassa, jota käytät. Jos kaavakokoelmassa ei sitä näy, niin perustele kyseinen ominaisuus kaavakokoelman tiedoilla.

Kaavakokoelma

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), & \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \\ \sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)), & \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)), \\ \sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)). \end{aligned}$$

$$\hat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos(n\omega t + \theta_n)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \\ \sin\theta &= \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T} \int_d^{d+T} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad g_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G_n e^{jnk\frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega u} du, \quad \mathcal{F}^{-1}\{F\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

$$\mathcal{F}\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \neq 0,$$

$$\mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega) = j\omega F(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\}(\omega) = e^{-ja\omega} F(\omega),$$

$$\mathcal{F}\{e^{jbt} f(t)\}(\omega) = F(\omega - b)$$

$$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\}(\omega) = F(\omega)G(\omega),$$

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}(\omega) = \frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f\}(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{F(t)\}(\omega) = 2\pi f(-\omega).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$\hat{F}(\omega) = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kt) e^{-j\omega kt}, \quad \{\hat{F}_n\}_{n=0}^{N-1} = \{h G_n\}_{n=0}^{N-1}.$$