



MAT-02450 Fourier'n menetelmät

Tentti 4.3.2016 / Merja Laaksonen

-Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
Muista, että pisteet tulevat perusteluista eikä arvauksista.

1. Funktio f on määritelty yhtäöllä

$$\begin{cases} f(t) = t, & \text{kun } |t| < 1, \\ f(t+2) = f(t). \end{cases}$$

Laske määritelmän mukaisesti sille trigonometrisen Fourier-sarja.

2. Funktio $f : f(t) = -2 + 3 \cos(2t) - 3 \sin(2t) + 4 \cos(3t)$.

- Mikä on sen jakso T ja kulmataajuus ω ?
- Esiitä sen F-sarja kaikissa kolmessa esitysmuodossa.
- Laske funktion f keskimääräinen teho.

3. Funktio $f : f(t) = H(t-1)e^{-4t}$.

- Laske määritelmän mukaisesti sen Fourier-muunnos.
- Mikä on f :n amplitudispektiri? Hahmotta sen kuvaaja.

4. Jos

$$G(\omega) = \frac{3}{(2+j2\omega)^2} \text{ ja } F(\omega) = \mathcal{F}\{\cos(\sqrt{3}t)\}(\omega),$$

niin laske tulon $G(\omega)F(\omega)$ käänneismuunnos ja sievennä tulos reaalisiksi.

Pari muunnosta, joista on apua tai sitten ei:

$$1. \mathcal{F}\{1\}(\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad 2. \mathcal{F}\{H(t)te^{-at}\}(\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^2}, a > 0.$$

Kaavakokoelma

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), & \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \\ \sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)), & \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)), \\ \sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)). \end{aligned}$$

$$\hat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos(n\omega t + \theta_n)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\frac{1}{T} \int_d^{d+T} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-jn\frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad g_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G_n e^{jn\frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega u} du, \quad \mathcal{F}^{-1}\{F\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

$$\mathcal{F}\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \neq 0, \quad \mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega) = j\omega F(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\}(\omega) = e^{-j\omega a} F(\omega), \quad \mathcal{F}\{e^{jbt} f(t)\}(\omega) = F(\omega - b)$$

$$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\}(\omega) = F(\omega)G(\omega), \quad \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}(\omega) = \frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f\}(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{F(t)\}(\omega) = 2\pi f(-\omega), \quad (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$\hat{f}(\omega) = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) e^{-j\omega kh}, \quad \{\hat{f}_n\}_{n=0}^{N-1} = \{hG_n\}_{n=0}^{N-1}.$$