



MAT-02450 Fourier'n menetelmät

Tentti 1.9.2014 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.

1. Funktio f on määritelty yhtälöllä

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } -\frac{1}{2} < t < 0, \\ 5, & \text{kun } 0 < t < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad f(t+1) = f(t).$$

Laske määritelmän mukaisesti sille kompleksisen Fourier-sarjan termi indeksin n arvolla 23. Esitä sievennettyä kyseisen termin reaalisosa ja imaginaariosa hetkellä $t = 1/4$.

2. Signaali $f : f(t) = \frac{1-j}{4}e^{-j2t} + 1 + \frac{1+j}{4}e^{j2t}$.

- Mikä on sen jakso T ja kulmataajuus ω ?
- Esitä sen F-sarja kaikissa kolmessa esitysmuodossa.
- Laske signaalin f keskimääräinen teho.

3. Laske funktiolle $f : f(t) = H(t)e^{-2t}$ Fourier-muunnos. Mikä on f :n amplitudispektri? Piirrä sen kuvaaja

4. Laske käänteismuunnos funktiolle

$$F(\omega) = \pi \frac{\delta(\omega+3) + \delta(\omega-3)}{j\omega+2}.$$

Esitä lopputulos reaalfunktiona.

Kaavakokoelma

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), & \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \\ \sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)), & \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)), \\ \sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)). \end{aligned}$$

$$\hat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos(n\omega t + \theta_n)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\frac{1}{T} \int_d^{d+T} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad g_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G_n e^{jnk\frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega u} du, \quad \mathcal{F}^{-1}\{F\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

$$\mathcal{F}\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \neq 0,$$

$$\mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega) = j\omega F(\omega),$$

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\}(\omega) = e^{-j\omega a} F(\omega),$$

$$\mathcal{F}\{e^{ibt} f(t)\}(\omega) = F(\omega - b),$$

$$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\}(\omega) = F(\omega) G(\omega),$$

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}(\omega) = \frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega),$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f\}(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{F(t)\}(\omega) = 2\pi f(-\omega), \quad (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

$$\hat{F}(\omega) = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) e^{-j\omega kh}, \quad \{\hat{F}_n\}_{n=0}^{N-1} = \{h G_n\}_{n=0}^{N-1}.$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\int u^2 v = \frac{1}{3} u^3 - \int u v^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}$$

5.2