

MAT-02400 Vektorianalyysi / Hirvonen

Tentti 20.05.2015

Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

1. Laske funktion $f(x, y, z) = x + z$ pintaintegraali läpi sylinteripinnan $x^2 + y^2 = 9$ sen osan, jolla $y \leq 0$, ja jota rajoittavat xy -taso ja taso $z = 4$.
2. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3y, yz^2, xz)$ vuo kohti origoa läpi origokeskisen yksikköpallopinnan.
3. Laske funktion $f(x, y) = xy^4 + y$ käyräintegraali yli käyrän $x^2 + y^2 = 4$, jossa $x \leq 0$, kuljettuna alhaalta ylöspäin.
4. Laske työ, jonka kenttä $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + yz, xz, xy)$ tekee, kun massapiste siirtyy kentässä ensin pitkin janaa pisteestä $(0, 1, 2)$ pisteeseen $(1, 2, -1)$ ja sieltä pitkin janaa origoon.

MAT-02400 Vektorianalyysi, tentin kaavaliite

1. $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$, $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$

2. $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$
 $\nabla \cdot (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{G} + f(\nabla \cdot \mathbf{G})$
 $\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$
 $\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

3. $\oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$

4. $\oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy$

5. $\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV$

6. $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$

7. $\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \implies dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$

8. $\mathbf{N}(\phi, \theta) = a^2 \sin \phi (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$, $\|\mathbf{N}(\phi, \theta)\| = a^2 \sin \phi$

9. Massa ja massakeskipiste. Käyrälle C :

$$m = \int_C \delta ds, \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x \delta ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y \delta ds, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \int_C z \delta ds.$$

Pinnalle S :

$$m = \iint_S \delta dS, \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x \delta dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y \delta dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z \delta dS.$$

10. $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$, $\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$, $\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$