

**MAT-02400 Vektorianalyysi (Vuojo)**
Tentti 17.6.2014

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite ohessa.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

1. Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, \cos z + x^2y, -y \sin z)$ divergenssi ja roottori. Määritä kentälle myös potentiaali tai jos sellaista ei ole olemassa, perustele miksi.
2. Funktio $f(x) = -x^2$ rajaa x -akselin kanssa tasoalueen välillä $1 \leq x \leq 2$. Piirrä tilanteesta kuva ja merkitse siihen reunakäyrän positiivisen suunnistuksen suunta. Laske positiivisesti suunnistetulle reunalle vektorikentän käyräintegraali kentälle

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{3}xy + \tan x \right) \mathbf{i} + \left(y \cos y - \frac{1}{x} \right) \mathbf{j}.$$

3. Tason K yhtälö on $5x - 11y - z + 8 = 0$. Tason ja lieriön $x^2 + y^2 \leq 2$ leikkaus on pinta S . Pinnan positiivisesti suunnistettu reunakäyrä on se käyrä, joka kuljetaan positiivisen z -akselin suunnasta katsottuna vastapäivään.
 - (a) Määritä jokin pinnan S positiivisen puolen normaalivektori.
 - (b) Laske pinnan S pinta-ala.
4. Laske vektorikentän

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + 3y + z^2, 2x + z^2 + 1, x^4y)$$

vuoksi alaspäin origokeskisen 3-säteisen pallonkuoren puolikkaan ($z \geq 0$) läpi.

MAT-02400 Vektorianalyysi, tentin kaavaliite

$$1. \mathbf{r} = (x, y, z), \quad r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \nabla \cdot \mathbf{r} = 3$$

$$2. \begin{aligned} \nabla(fg) &= (\nabla f)g + f\nabla g \\ \nabla \cdot (f\mathbf{G}) &= (\nabla f) \cdot \mathbf{G} + f(\nabla \cdot \mathbf{G}) \\ \nabla \times (f\mathbf{G}) &= (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G}) \\ \nabla[h(f(\mathbf{r}))] &= h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$3. \oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$4. \oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy$$

$$5. \iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

$$6. \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$7. \begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \implies dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$8. \mathbf{N}(\phi, \theta) = a^2 \sin \phi (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi), \quad \|\mathbf{N}(\phi, \theta)\| = a^2 \sin \phi$$

9. Massa ja massakeskipiste. Käyrälle C :

$$m = \int_C \delta ds, \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x \delta ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y \delta ds, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \int_C z \delta ds.$$

Pinnalle S :

$$m = \iint_S \delta dS, \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x \delta dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y \delta dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z \delta dS.$$

$$10. \sin(2t) = 2 \sin t \cos t, \quad \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

$$V_1^2 = \frac{4\pi r^2}{3}$$