MAT-02400 Vektorianalyysi

Tentti 14.12.2015 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta

1. Funktio

$$f(x,y,z) = 2xy + e^{-z^2} + 2015z$$

ja piste $\mathbf{a} = (6,7,0)$. Laske seuraavien arvot pisteessä $\mathbf{a}$

$$\nabla f(x,y,z), \quad \nabla \cdot \nabla f(x,y,z), \quad \nabla \times \nabla f(x,y,z).$$

2. Vektorikenttä

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(2xz + \sqrt{y},\ \frac{x}{2\sqrt{y}},\ x^2 - 3z^2\right)$$

ja tie $C : \mathbf{r}(t) = \left(t, t^2, \sqrt{t}\right)$, missä $t = 1 \to 4$.

(a) Jos kenttä on konservatiivinen, niin mikä on vektorikentän potentiaalifunktio?

(b) Laske

$$\int_C \mathbf{F}(x,y,z) \cdot d\mathbf{r}.$$

3. Vektorikenttä $\mathbf{F}(x,y) = \left(x^2 - y, x + 3y\right)$ ja alue Ω on xy-tason ensimmäisessä neljänneksessä olevan origokeskisen yksikkökiekon osa. Määritä seuraavien integraalien arvot

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{n}\, ds, \quad \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{T}\, ds,$$

missä $\mathbf{n}$ on ulkonormaali ja $\mathbf{T}$ on reunaviivan yksikkötangentti.

4. Vektorikenttä $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x + z, x + y, z + y\right)$. Laske vektorikentän vuo pinnan S läpi ulospäin, kun S on sylinterin

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 3, 0 \le z \le 2\right\}.$$

pinta **a)** ilman pohjia **b)** pohjien kanssa.

Henri K.

Kaavakokoelma

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA$$

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_\Omega f(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, du\, dv$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_\Omega \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\, du\, dv$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

$$n = \frac{N}{\|N\|} \qquad N = r_u \times r_v$$