

Tentaattori: Petteri Laakkonen

Huom. Ei laskinta, eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite alla.

1. Osoita, että funktio $f(x, y) = -\sin(2x)e^{2y}$ toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

2. Tarkastellaan funktioita $F(x, y) = (e^{xy}, x^2 + y)$ ja $G(x, y) = (x^2, x + y^2, y)$.

- a) Laske funktion F derivaattamatriisi pisteessä $(1, 0)$.
 b) Laske funktion G derivaattamatriisi pisteessä $(1, 1)$.
 c) Vain toinen yhdistetyistä funktioista $F \circ G$ ja $G \circ F$ voidaan muodostaa. Muodosta se ja laske sen derivaattamatriisi pisteessä $(1, 0)$.

3. Mitkä ovat funktion $f(x, y) = x^2 + x - y^2$ pienin ja suurin arvo origokeskisessä 2-säteisessä kiekossa

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\},$$

ja missä pisteissä ne saavutetaan?

4. Olkoon $T \subset \mathbb{R}^3$ tetraedri, joka sijaitsee ensimmäisessä koordinaattikahdeksannessa, eli $x, y, z \geq 0$, ja jota rajoittavat tasot $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 4$. Hahmottele kappale T ja laske sen massa, kun tiheys funktio on $\rho(x, y, z) = k$, missä $k > 0$ on vakio.

Tentin kaavaliite

i. $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$

ii.
$$\begin{cases} g(x, y) = 0 \\ D_x f(x, y) = \lambda D_x g(x, y) \\ D_y f(x, y) = \lambda D_y g(x, y) \end{cases}$$

iii.
$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \quad dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\phi d\rho d\theta$$

iv. $m = \iiint_T \rho(\mathbf{x}) dV, \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x \rho(\mathbf{x}) dV, \quad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)(\mathbf{x}) dV$

v. $\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$

vi. $(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0$