

MAT-01420 Insinöörimatematiikka B4

Tentti 10.11.2014 / Kimmo Vattulainen

- Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.
 - Kääntöpuolella kaavakokoelma
-

1. Olkoon käyrä $\mathbf{r}(t) = (t, t^3, 4 - t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

- Missä xy -tason pisteessä/pisteissä käyrä leikkaa xy -tason?
- Mikä on käyrän pisteeseen $t = -1$ piirretyn tangenttisuoran parametriesitys?
- Onko olemassa toista käyrän pistettä, jossa tangenttisuora on yhdensuuntainen b)-kohdassa määritellyn suoran kanssa? Jos on, niin mikä on tämä piste?

2. a) Onko funktiolla

$$f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

raja-arvo origossa ja jos on, niin mikä on sen arvo.

b) Määritä pinnan

$$z = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

pisteeseen $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ piirretyn tangenttitason yhtälö.

3. Määritä funktion

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 8y - 2x^2y$$

ääriarvokohdat ja määrää niiden laatu, jos mahdollista, Hessen matriisin avulla.

4. Joukko $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\iint_A e^{-x^2-y^2} dx dy$$

ja jos suppenee, niin mikä on integraalin arvo?

Vihje: Napakoordinaattimuunnos ja siihen sopiva joukkojono.

MAT-01420 Insinöörimatematiikka B 4
Kaavakokoelma

$$1. \quad F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$2. \quad (G \circ F)'(\mathbf{x}) = G'(F(\mathbf{x}))F'(\mathbf{x})$$

$$3. \quad D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{e} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}$$

$$4. \quad \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

$$5. \quad T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

$$6. \quad P_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T H f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

$$7. \quad P_m(x, y) = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left((x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a, b)$$

8.

$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases} \quad \begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ h(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) + \mu \nabla h(\mathbf{x}) \end{cases}$$

9.

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

10.

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z) \, dV \\ = \iiint_U f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

11.

$$m = \iiint_T \rho \, dV, \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x \rho \, dV, \quad I_x = \iiint_T (y^2 + z^2) \rho \, dV$$

12.

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

13.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1}$$

14.

$$\begin{aligned} \int f'(g(t))g'(t) \, dt &= f(g(t)) + C \\ \int u(x)v'(x) \, dx &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) \, dx + C \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx &= \ln |f(x)| + C \end{aligned}$$