

Ponkala

**MAT-01410 Insinöörimatematiikka A4 (kevät 2015) / Mattila
Tentti 18.5.2015**

Vastaa kaikkien neljän kysymyksen kaikkiin kohtiin. Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä. Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita. Myöskään erillistä kaavakokoelmaa ei ole, vaan vaikeasti muistettavat relevantit kaavat on annettu tehtävänantojen yhteydessä. Tehtäväpaperia ei tarvitse palauttaa. Tehtävien ratkaisut löytyvät kokeen jälkeen kurssin Moodle-alueelta. Muistathan antaa opintojaksosta palautetta Kaiku-järjestelmän kautta saadaksesi opintosuorituksen.

1. Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}.$$

- (a) Mikä on funktion f (laajin mahdollinen) määrittelyjoukko M_f ? (1p)
 - (b) Määritä tasa-arvokäyrät $f^{-1}(0) = \{(x, y) \in M_f \mid f(x, y) = 0\}$ ja $f^{-1}(1) = \{(x, y) \in M_f \mid f(x, y) = 1\}$. (1p)
 - (c) Määritä raja-arvot $\lim_{(x,y) \rightarrow (9,16)} f(x, y)$ ja $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ tai osoita, että raja-arvoa ei ole olemassa. (2p)
 - (d) Määritä funktion f ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat. (2p)
2. Maanomistaja omistaa kolmion muotoisen tontin, jonka kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(3, 0)$ ja $(0, 3)$. Alueen pinnan korkeus pisteessä (x, y) saadaan funktiosta

$$h(x, y) = \frac{1}{100}(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5),$$

missä yksi pituusyksikkö vastaa yhtä kilometriä.

- (a) Omistaja aikoo porata kaivon tonttinsa matalimpaan kohtaan ja rakentaa näköalatasanteen tontin korkeimpaan kohtaan. Määritä näiden pisteiden x - ja y -koordinaatit. (4p)
 - (b) Omistaja seisoo tontin pisteessä $(1, 1)$. Mihin suuntaan rinne nousee jyrkimmin? Kuinka jyrkästi? (2p)
3. (a) Määritä integraali

$$\int_0^1 \int_x^1 x^2 e^{y^4} dy dx. \quad (3p)$$

Ohjeita: Integroimisjärjestys saattaa olla järkevää vaihtaa. Kiinnitä huomiota integroimisrajoihin, piirrä myös kuva integroimisalueesta.

- (b) Määritä integroimalla napakoordinaatteja apuna käyttäen sellaisen kappaleen tilavuus, jota rajoittavat yläpuolelta paraboloidi $z = 1 - (x^2 + y^2)$ ja alapuolelta xy -taso. (3p)

Ohjeita: Määritä ensin paraboloidin ja xy -tason leikkauskäyrä. Parametrisoi sitten käyrän sisään jäävä joukko R napakoordinaatteja käyttäen ja laske tilavuus kaavalla

$$\iint_R f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

4. (a) Laske $\int_0^1 \int_1^{2y} \int_0^x (x + 2z) dz dx dy$. (3p)

- (b) Määritä integraali

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} dz dy dx$$

pallokoordinaatteja apuna käyttäen. (3p)

Ohjeita: Hahmottele ensin integroimisalue T karteesisessa koordinaatistossa ja määritä sen jälkeen alueen rajat pallokoordinaatistossa. Muista, että $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ja käytä kaavaa

$$\begin{aligned} & \iiint_T f(x, y, z) dV \\ &= \iiint_U f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta. \end{aligned}$$