

MAT-01410 Insinöörimatematiikka A4 (kevät 2016) / Mattila
Tentti 9.5.2016

Vastaa kaikkien neljän kysymyksen kaikkiin kohtiin. Tarkastuksen nopeuttamiseksi **tee tehtävät 1 ja 2 eri konseptille kuin tehtävät 3 ja 4**. Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä. Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita. Myöskään erillistä kaavakokoelmaa ei ole, tarpeelliset kaavat on annettu tehtävänantojen yhteydessä. Tehtäväpaperia ei tarvitse palauttaa. Tehtävien ratkaisut löytyvät kokeen jälkeen kurssin Moodle-alueelta. Muistathan antaa opintojaksosta palautetta Kaiku-järjestelmän kautta saadaksesi opintosuorituksen.

1. Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota

$$f(x, y) = \frac{\sin y}{2x + y}.$$

- (a) Mikä on funktion f (laajin mahdollinen) määrittelyjoukko M_f ? (1p)
 - (b) Määritä tasa-arvokäyrä $f^{-1}(0) = \{(x, y) \in M_f \mid f(x, y) = 0\}$. (1p)
 - (c) Määritä raja-arvot $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})} f(x, y)$ ja $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ tai osoita, että raja-arvoa ei ole olemassa. (2p)
 - (d) Määritä funktion f ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat. (2p)
2. (a) Muodosta funktion $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ lineaarinen approksimaatio pisteen $(36, 27)$ suhteen käyttämällä kaavaa

$$f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k$$

ja arvioi sen avulla lukua $\sqrt{37}\sqrt[3]{24}$. (3p)

- (b) Osoita, että funktiot $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, G(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ ja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, F(u, v, w) = uv + \frac{1}{w}$ toteuttavat ketjusäännön

$$(F \circ G)'(x, y, z) = F'(G(x, y, z))G'(x, y, z) \quad (3p)$$

(Ohje: vektorifunktion derivaattamatriisin i . rivin ja j . sarakkeen alkiona on i :nnen koordinaattifunktion derivaatta j :nnen muuttujan suhteen.)

3. (a) Määritä integraali

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4 + 1} dy dx. \quad (3p)$$

Ohjeita: Integroimisjärjestyksen vaihto helpottaa laskemista. Kiinnitä huomiota integroimisrajoihin, piirrä myös kuva integroimisalueesta.

- (b) Määritä napakoordinaatteja apuna käyttäen integraali

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dy dx. \quad (3p)$$

Ohjeita: Hahmottele integroimisalue, etsi sille rajat napakoordinaateissa ja käytä kaavaa

$$\iint_R f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

4. (a) Laske $\int_1^2 \int_{1-y}^{1+y} \int_0^{yz} \frac{6xy}{z} dx dz dy. \quad (3p)$

- (b) Määritä funktion $\left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2$ epäoleellinen integraali yli alueen $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ pallokoordinaatteja apuna käyttäen. (3p)

Ohjeita: Hahmottele ensin integroimisalue karteesisessa koordinaatistossa ja määritä sen jälkeen integroimisalueen tyhjentävä jono pallokoordinaatiston joukkoja. Muista, että $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ja käytä kaavaa

$$\begin{aligned} & \iiint_T f(x, y, z) dV \\ &= \iiint_U f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta. \end{aligned}$$