MAT-01400 Insinöörimatematiikka X 4 / Hirvonen
Tentti 22.08.2016, ratkaisut

1. Käyrän C parametrisointi on $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 4t + 3, t^3 - 12t)$, $t \in [-5, 5]$.

   (a) Onko käyrä C sileä koko määrittelyjoukossaan?
   Ratkaisu. Käyrä on sileä, jos sen parametrisoinnin derivaatta on jatkuva ja nollasta eroava.

   $$\mathbf{r}'(t) = \left(2t - 4, 3t^2 - 12\right)$$

   on jatkuva, koska sen komponenttifunktiot ovat jatkuvia polynomeina. Derivaatta on nollavektori, kun

   $$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 4 = 0 \\ 3t^2 - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \pm 2 \end{cases},$$

   jotka ovat yhtä aikaa voimassa, kun $t = 2$. Koska $2 \in [-5, 5]$, käyrä C <u>ei ole sileä koko määrittelyjoukossa</u>.

   (b) Etsi kaikki pisteet (x, y), joissa käyrällä C on vaakasuora tangenttisuora.
   Ratkaisu. Tangentti on vaakasuora, kun $y'(t) = 0$ ja $x'(t) \neq 0$. Kohdassa (a) lasketun perusteella tangentti on vaakasuora vain käyrän pisteessä $\mathbf{r}(-2) = (15, 4)$.

   (c) Esitä funktion $f(x, y) = x\sqrt{x + 2y + 1}$ kuvaajalle (pinnalle) piirretyn tangenttitason yhtälö siinä pisteessä, jossa $(x, y) = \mathbf{r}(4)$.
   Ratkaisu. Yhtälöä haetaan pisteessä $\mathbf{r}(4) = (3, 16)$. Lasketaan funktion ja osittaisderivaattojen arvot tässä pisteessä.

   $$\begin{aligned}
   f(3,16) &= 2\sqrt{3+32+1} = 2\sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12 \\
   \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \sqrt{x+2y+1} + x\frac{1}{2\sqrt{x+2y+1}} = \frac{3x+4y+2}{2\sqrt{x+2y+1}}, \\
   \frac{\partial f}{\partial x}(3,16) &= \frac{9+64+2}{2\sqrt{3+32+1}} = \frac{75}{2\cdot 6} = \frac{25}{4}, \\
   \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\frac{1}{2\sqrt{x+2y+1}} \cdot 2 = \frac{x}{\sqrt{x+2y+1}}, \\
   \frac{\partial f}{\partial y}(3,16) &= \frac{6}{\sqrt{36}} = 1.
   \end{aligned}$$

   (Huom. Kaavakokoelman kaava 1 on linearisoinnin kaava, jolla approksimoidaan funktion arvoa tangenttitasolla saatavalla arvolla.) Tangenttitason yhtälö on

   $$z = 12 + \begin{bmatrix} \frac{25}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 3 \\ y - 16 \end{bmatrix} = 12 + \frac{25}{4}(x-2) + (y - 16)$$
   $$(= \frac{25}{4}x + y - \frac{33}{2})$$

2. (a) Tarkastellaan funktiota $f(x,y)$, jonka muuttujat x ja y riippuvat suureista r ja θ, ts. $x = g(r,\theta)$ ja $y = h(r,\theta)$. Tiedetään, että $g\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = -1$ ja $h\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Lisäksi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = 5,$$
$$\frac{\partial x}{\partial r}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = 6, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = 7, \quad \frac{\partial y}{\partial r}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = 8, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = 9.$$

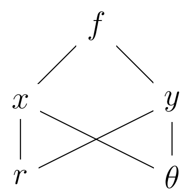
Laske $\dfrac{\partial f}{\partial r}\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ja $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ratkaisutapa 1. Tehtävässä on tarkoitus käyttää ketjusääntöä. Tämä ratkaisu käyttää kaavakokoelman kaavaa 2. Nyt ulkofunktio (kaavassa F) on f, ja sisäfunktio $G(r,\theta) = (g(r,\theta), h(r,\theta))$. Kysytyt osittaisderivaatat ovat yhdistetyn funktion $F \circ G$ osittaisderivaatat.

$$\begin{aligned}(F \circ G)\left(1,\frac{\pi}{2}\right) &= F'\left(G\left(1,\frac{\pi}{2}\right)\right) G'\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = F'(-1,1)\, G'\left(1,\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 6 + 4 \cdot 8 & 2 \cdot 7 + 4 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 50 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

joten $\dfrac{\partial f}{\partial r}\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right) = 44$ ja $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right) = 50$.

Ratkaisutapa 2. Kirjoitetaan auki ketjusäännön erikoistapaus, jossa (monisteen merkintöjä käyttäen) $n = p = 2$ ja $m = 1$.



Sisäfunktion sijoittaminen ulkofunktion derivaattaan tarkoittaa nyt sitä, että ulkofunktion osittaisderivaatat otetaan pisteessä $(x,y) = \left(g\left(1,\frac{\pi}{2}\right), h\left(1,\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial r}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)\frac{\partial x}{\partial r}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\frac{\partial y}{\partial r}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot 6 + 4\cdot 8 = 44,$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)\frac{\partial x}{\partial \theta}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\frac{\partial y}{\partial \theta}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot 7 + 4\cdot 9 = 50.$$

(b) Selvitä funktion $f(x,y,z) = z\ln(x^2+y^2)$ määrittelyjoukko ja laske kaikki toiset osittaisderivaatat.

Ratkaisu. Funktio on määritelty, kun $x^2+y^2>0$, eli $(x,y)\neq(0,0)$. Siis f ei ole määritelty z-akselilla. Määrittelyjoukko on $D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : x=y=0\}$.
Ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{x^2+y^2}\cdot 2x = \frac{2xz}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2yz}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \ln\left(x^2+y^2\right).$$

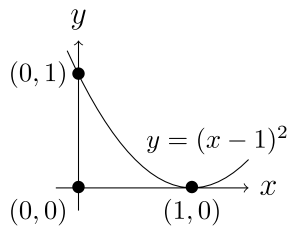
Toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2z\left(x^2+y^2\right) - 2xz\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2z\left(-x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2z\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{-4xyz}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = \frac{2y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

3. Etsi funktion $f(x,y) = x^3 - y - 3x + 1$ suurin ja pienin arvo suljetussa joukossa, jonka rajaavat koordinaattiakselit ja käyrä $y = (x-1)^2$.

Ratkaisu. Ääriarvot voivat tulla alueen sisällä olevissa kriittisissä pisteissä tai reunakäyrillä saatavien yhden muuttujan funktioiden derivaatan nollakohdissa tai niiden määrittelyrajoilla (tämän alueen tapauksessa tämä tarkoittaa käyrien leikkauspisteitä).



Kriittiset pisteet: Polynomi on derivoituva koko avaruudessa $\mathbb{R}^2$, joten kriittisiä pisteitä voi olla vain osittaisderivaattojen nollakohdissa. Koska osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial y} = -1 \neq 0$, ei kriittisiä pisteitä ole.

Reunakäyrät:

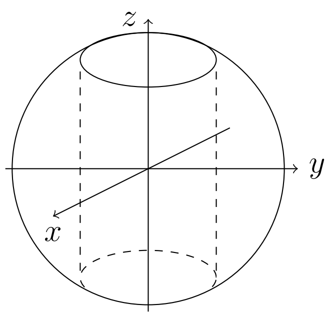
- x-akselilla funktion esitys on $f(x,0) = x^3 - 3x + 1 \overset{\text{merk.}}{=} g_1(x)$ ja sen derivaatta on $g_1'(x) = 3x^2 - 3$, joka on nolla, kun $x = \pm 1$. Näistä arvoista huomioidaan vain positiivinen, koska piste $(1,0)$ on alueessa, mutta $(-1,0)$ ei ole.
- y-akselilla $f(0,y) = -y+1 \overset{\text{merk.}}{=} g_2(y)$, jonka derivaatalla $g_2'(y) = -1$ ei ole nollakohtia.
- käyrällä $y = (x-1)^2$ funktion esitys on $f\left(x,(x-1)^2\right) = x^3 - (x-1)^2 - 3x + 1 = x^3 - x^2 - x \overset{\text{merk.}}{=} g_3(x)$, jolle $g_3'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$, kun $x = \frac{1}{6}(2\pm 4)$ eli $x = 1$ tai $x = -\frac{1}{3}$. Piste $(1,0)$ on alueessa, $\left(-\frac{1}{3}, \frac{16}{9}\right)$ ei ole.

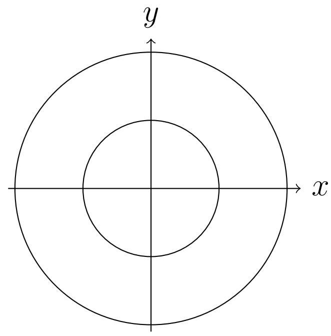
Tutkittavaksi jäivät siis vain pisteet $(0,0)$, $(1,0)$ ja $(0,1)$.

$$f(0,0) = 1 \text{ (suurin arvo)}, \quad f(1,0) = -1 \text{ (pienin arvo)}, \quad f(0,1) = 0.$$

4. Kuulan $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ läpi porataan reikä, jonka reuna on sylinterin $x^2 + y^2 = 1$ muotoinen. Laske reiällisen kuulan tilavuus avaruusintegraalina.

Ratkaisu. Kuvissa reiällinen pallo sekä sen projektio xy-tasolle.





Käytetään sylinterikoordinaatteja, koska sekä kuula että sylinteri ovat pyörähdyskappaleita z-akselin ympäri. Koordinaatin z suunnassa mennään pallon alapinnalta yläpinnalle. Pallopinnan esitys on

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{4 - (x^2 + y^2)} = \pm\sqrt{4 - r^2}.$$

xy-tason suunnassa mennään sylinteripinnalta pallopinnalle eli $r \in [1, 2]$ ja z-akselin ympäri koko ympyrä eli $\theta \in [0, 2\pi]$. Siis integraali on

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} 1r \, dz dr d\theta &= \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \int_1^2 \Big/_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dr \\
&= (2\pi - 0) \int_1^2 r \cdot \left(\sqrt{4 - r^2} + \sqrt{4 - r^2} \right) dr \\
&= 2\pi \int_1^2 2r \left(4 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} dr = 2\pi \Big/_1^2 - \frac{2}{3} \left(4 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{4\pi}{3} \left(0 - 3^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{4\pi \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{3} = 4\pi \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{3}\pi.
\end{aligned}$$