

MAT-01400 Insinöörimatematiikka X 4 / Hirvonen

Tentti 22.08.2016

Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

1. Käyrän C parametrisointi on $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 4t + 3, t^3 - 12t)$, $t \in [-5, 5]$.

(a) Onko käyrä C sileä koko määrittelyjoukossaan?

(b) Etsi kaikki pisteet (x, y) , joissa käyrällä C on vaakasuora tangenttisuora.

(c) Esitä funktion $f(x, y) = x\sqrt{x + 2y + 1}$ kuvaajalle (pinnalle) piirretyn tangenttitason yhtälö siinä pisteessä, jossa $(x, y) = \mathbf{r}(4)$.

2. (a) Tarkastellaan funktiota $f(x, y)$, jonka muuttujat x ja y riippuvat suureista r ja θ , ts. $x = g(r, \theta)$ ja $y = h(r, \theta)$. Tiedetään, että $g(1, \frac{\pi}{2}) = -1$ ja $h(1, \frac{\pi}{2}) = 1$. Lisäksi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 5,$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 6, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 7, \quad \frac{\partial y}{\partial r}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 8, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 9.$$

Laske $\frac{\partial f}{\partial r}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ja $\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

(b) Selvitä funktion $f(x, y, z) = z \ln(x^2 + y^2)$ määrittelyjoukko ja laske kaikki toiset osittaisderivaatat.

3. Etsi funktion $f(x, y) = x^3 - y - 3x + 1$ suurin ja pienin arvo suljetussa joukossa, jonka rajaavat koordinaattiakselit ja käyrä $y = (x - 1)^2$.

4. Kuulan $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ läpi porataan reikä, jonka reuna on sylinterin $x^2 + y^2 = 1$ muotoinen. Laske reiällisen kuulan tilavuus avaruusintegraalina.

