

MAT-01400 Insinöörimatematiikka X 4 / Hirvonen

Tentti 17.08.2015

Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

1. Olkoon $f(x, y) = \frac{x}{y} + e^x + 2y$, missä $x(t) = \ln t$ ja $y(t) = t^2$.

(a) Laske derivaatta $\frac{\partial f}{\partial t}$ ketjusäännöllä.

(b) Laske derivaatta $\frac{\partial f}{\partial t}$ ilman ketjusääntöä.

2. (a) Etsi funktion $f(x, y) = 2 - \sin(-x - 3y)$ linearisointi pisteen $(0, \pi)$ ympäristössä ja approksimoi sen avulla arvoa $f(-0.1, \pi)$.

(b) Näytä, että funktio $g(x, y)$ ei ole jatkuva origossa.

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kun } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{kun } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. Etsi funktion $f(x, y) = 2x^2 + xy + \frac{5}{4}y^2 - 2x - 2y + \frac{1}{2}$ suurin ja pienin arvo neliössä, jossa $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$.

4. Alla on tasointegraalien summa, jonka pystyy napakoordinaatteja käyttämällä esittämään pelkästään yhden tasointegraalin avulla. Esitä se yhtenä tasointegraalina ja laske tulos.

$$\int_{-2}^0 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx + \int_0^2 \int_x^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx.$$

Huom. Jos ei onnistu summan esittäminen yhtenä integraalina, yritä edes esittää jompikumpi integraaleista napakoordinaateissa ja laskea tulos.

Insinöörimatematiikka X 4, kaavakokoelma

1. $z = f(a, b) + \frac{\partial}{\partial x} f(a, b)(x - a) + \frac{\partial}{\partial y} f(a, b)(y - b)$
2. $T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$
3. $F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{x}) & D_2 f_m(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$
4. $(F \circ G)'(\mathbf{a}) = F'(G(\mathbf{a})) G'(\mathbf{a})$
5. $D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) \mathbf{e} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}$
6. $\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$
7. $\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases}, \quad \begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ h(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) + \mu \nabla h(\mathbf{x}) \end{cases}$
8. $H_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 D_1 f(\mathbf{x}) & D_1 D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_1 D_n f(\mathbf{x}) \\ D_2 D_1 f(\mathbf{x}) & D_2 D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_2 D_n f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(\mathbf{x}) & D_n D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_n D_n f(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$
9. $\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$
10. $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_U f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$
11. $m = \iiint_T \delta dV, \quad \bar{z} = \iiint_T z \delta dV, \quad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \delta dV$
12. $\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_S f(F(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$
13. $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1}$
14. $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)), \quad \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$
15. $\int f'(g(x)) g'(x) dx = f(g(x)) + C$
 $\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$
 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$