

B B Tentti (2)

IMA B3

B B 27.4. 2015

MAT-01320 / Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kaavaliite on tehtäväpaperin toisella puolella

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi ja opiskelijanumerosi. Lisäksi jätä etusivulle ja marginaaleihin tilaa tarkastajan merkintöjä varten.

Muistathan antaa palautetta Kaiku-järjestelmän kautta saadaksesi opintosuorituksen.

1. Laske epäoleellinen integraali tai näytä, että se hajaantuu

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$$

2. (a) Selvitä suppeneeko vai hajaantuuko sarja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 2n - 3}.$$

- (b) Laske integraali

$$\int x^3 e^{x^2} dx.$$

3. Etsi potenssisarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n x^n}{\sqrt{2n+1}}$$

suppenemissäde ja suppenemisväli.

4. (a) Hyttyspopulaation $p = P(t)$ kasvu on suoraan verrannollinen populaation koon neliöjuureen. Tarkastelun alussa, eli ajan hetkellä $t = 0$, hyttysiä on 1 miljoona. Kahden viikon kuluttua, ajan hetkellä $t = 2$, hyttysiä on 9 miljoonaa. Muodosta separoituva differentiaaliyhtälö, joka kuvaa tilannetta ja ratkaise se. Tämän jälkeen selvitä, milloin hyttyspopulaation koko ylittää 25 miljoonaa.

- (b) Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y''(x) - 2y'(x) - 35y(x) = 0, \quad y(0) = 12, y'(0) = 0.$$

1.

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) + C$
$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$	$\ln \sin(x) + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x) + C = \ln x + \sqrt{x^2-1} + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh}(x) + C = \frac{1}{2} \ln \left \frac{x+1}{x-1} \right + C$

$$2. s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx, \quad A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+f'(x)^2} dx, \quad V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

$$3. \sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi, \quad \cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$$

$$4. \sum_{k=l}^{\infty} aq^k, \text{ geometrinen sarja. Jos suppenee, niin } S = \frac{aq^l}{1-q}.$$

$$3. f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

5.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (x \in \mathbb{R})$$