

Vastaa **jokaiseen kysymykseen** ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä **ei saa käyttää** muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta. Kirjoita **kaikkiin papereihin selkeästi** nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi. Muistathan antaa palautetta Kaiku-järjestelmän kautta saadaksesi opintosuorituksen. **Kaavat kääntöpuolella.**

1. (a) (3 pistettä) Laske integraali

$$\int_0^1 \frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}} dx$$

käyttäen sijoitusta $u = 1 + e^{3x}$.

- (b) (3 pistettä) Osoita, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+4}$$

suppenee tai hajaantuu.

2. Muodosta funktiolle $\ln(1+x)$ viidennen asteen Taylorin polynomi $P_5(x)$, jonka kehityskeskus on origo, ja jäännöstermi $R_5(x)$.

3. (a) (3 pistettä) Etsi differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu

$$y'(x) + \frac{1}{2x}y(x) = x \ln x.$$

- (b) (3 pistettä) Etsi differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x.$$

1.

$$f(x) = -e^{-x} \Rightarrow$$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) + C$
$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$	$\ln \sin(x) + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x) + C = \ln x + \sqrt{x^2-1} + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh}(x) + C = \frac{1}{2} \ln \left \frac{x+1}{x-1} \right + C$

$$2. s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx, \quad A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+f'(x)^2} dx, \quad V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

$$3. \sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi, \quad \cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$$

$$4. \sum_{k=l}^{\infty} aq^k, \text{ geometrinen sarja. Jos suppenee, niin } S = \frac{aq^l}{1-q}.$$

$$5. f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

6.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (x \in \mathbb{R})$$