

**MAT-01220 Insinöörimatematiikka B2**  
**Tentti 12.2. 2015 / Kaarakka**

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kaavaliite on tehtäväpaperin toisella puolella

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi. Lisäksi jätä etusivulle ja marginaaleihin tilaa tarkastajan merkintöjä varten.

1. Tason kolme pistettä ovat  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, -3, 0)$  ja  $(0, -1, 2)$ . Suoran kaksi pistettä ovat  $(1, 1, 1)$  ja  $(2, 3, 2)$ . Määritä tason ja suoran leikkauspiste.
2. Millä vakioiden  $a, b \in \mathbb{R}$  arvoilla yhtälöryhmällä
  - a) on yksikäsitteinen ratkaisu? Esitä ratkaisu.
  - b) on äärettömän monta ratkaisua? Esitä ratkaisu.
  - c) ei ole lainkaan ratkaisua?

$$\begin{cases} x + y + 5z = 1 \\ -x - 2z = 3 \\ x + y + az = b \end{cases}$$

3. Olkoon matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Laske seuraavat kohdat. Kirjoita välivaiheet ja perustelut näkyviin.

- a)  $\det(A)$
  - b)  $\text{rank}(A)$
  - c)  $(I - A^{-1})(I + A + A^2) + (A^{-1})^T$
4. a) Mitkä ovat matriisin  $A$  ominaisarvot ja ominaisavaruudet (=ominaisvektorien joukot).

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

- b) Määritä diagonalisoituvuutta hyväksikäyttäen, mitä on  $A^{100}$

KAAVOJA ON PAPERIN TOISELLA PUOLELLA.

MAT-01220 Insinöörimatematiikka B2, kaavoja

1.  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$

2.  $\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$

3.  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

4.  $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left( \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \right) \mathbf{u}$

5.  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$

6.  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$

7.  $(AB)^T = B^T A^T, (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

8.  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

9.  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

10.  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \det(A - \lambda I) = 0$

11.  $S^{-1}AS = D \Leftrightarrow A = SDS^{-1}$

12.  $A^T A \bar{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$