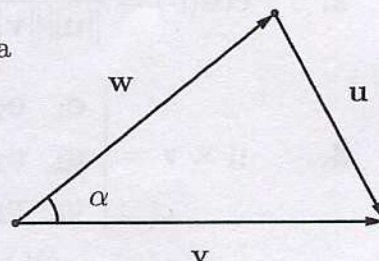


- Vastaa jokainen tehtävä eri konseptille.
- Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.
- Kääntöpuolella kaavakokoelma

1. a) Oheisessa kuvassa kolmion sivuja on merkitty vektoreina $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ sekä vektorien $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ välistä kulmaa luvulla α .
Olkoon sivujen pituudet $\|\mathbf{u}\| = a$, $\|\mathbf{v}\| = b$, $\|\mathbf{w}\| = c$.
Todista vektorilaskentaa käyttäen ns. kosinilause



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

- b) Leikkaavatko suorat ja jos leikkaavat, niin missä pisteessä?

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. a) 100 hengen matkaseurueella on 120 matkalaukkuja. Heidän on tarkoitus vuokrata autoja, joissa on kuljetuskapasiteettia seuraavan taulukon mukaisesti

	henkilöitä	laukkuja	hintaa
auto A	4	5	20
auto B	2	3	10
auto C	5	2	30

Etsi kaikki sellaiset autojen lukumäärien kombinaatiot, että jokainen auto tulee täyteen ihmisiä ja laukkuja. Muodosta lineaarinen yhtälöryhmä ja etsi sen ratkaisusta vastaus kysymykseen.

- b) Esitä ja laske matriisitulon avulla, mikä a)-kohdan ratkaisusta on edullisin.

3. Etsi yksi sellainen $\mathbb{R}^3$:n ortonormaali kanta, jossa yksi vektoreista on vektorin $\mathbf{u}$ suuntainen. Esitä vektori $\mathbf{x}$ näiden vektorien lineaarikombinaationa.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Olkoon matriisi A ja sen kaksi ominaisvektoria $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ seuraavat

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 10 \\ c & d & 0 \\ -5 & 15 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

missä vakiot $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ratkaise vakioiden a, b, c, d arvot. Mitkä ovat matriisin A ominaisarvot ja muut ominaisvektorit? Onko matriisi A diagonalisoituva? Jos on, niin mitkä ovat matriisit P ja D , jotka toteuttavat yhtälön $A = PDP^{-1}$. Matriisia P^{-1} ei tarvitse määrittää.

MAT-01220 Insinöörimatematiikka B2, kaavoja

$$1. \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

$$2. \quad \cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

$$3. \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$4. \quad \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \right) \mathbf{u}$$

$$5. \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$$

$$6. \quad \mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

$$7. \quad (AB)^T = B^T A^T, (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$8. \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$9. \quad \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

$$10. \quad A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \det(A - \lambda I) = 0$$

$$11. \quad S^{-1}AS = D \Leftrightarrow A = SDS^{-1}$$

$$12. \quad A^T A \bar{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$$