

- Vastaa jokainen tehtävä eri konseptille.
- Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.
- Kääntöpuolella kaavakokoelma

1. Olkoon avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteet $A = (2, 0, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 2, 1)$, $D = (1, 1, 1)$. Mikä pisteiden A, B, C määräämän tason piste on lähinnä pistettä D .

2. 3×5 -matriisin A sarakkeina ovat vektorit a, b, c, d ja e , joten $A = [a \ b \ c \ d \ e]$. Lisäksi tiedetään, että

$$A^T A = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Vastaa perustellen seuraaviin kysymyksiin. Mieti, mitä matriisin $A^T A$ alkioit ovat ja miten saat vastaukset kysymyksiin.

a) Mikä on vektorin $a - b + 2d$ pituus? Anna tarkka lukuarvo.

b) Onko matriisilla $A^T A$ käänteismatriisia? Entä jos muodostetaan neliömatriisi $B = [a \ b \ e]$, niin onko matriisilla B käänteismatriisia. Perustele vastauksesi.
Vihje: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A)$, *determinantin laskusäännöt*.

c) Muodosta yksi avaruuden $\mathbb{R}^3$ ortonormaali kanta. Anna vastaus joukkona, jonka alkioit ovat valitaan vektoreista a, b, c, d, e tarvittaessa skalaarilla kerrottuna.

3. Tehtävän 1 pisteet $A = (2, 0, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 2, 1)$, $D = (1, 1, 1)$ eivät olleet samalla tasolla. Määritä taso $z = ax + by + c$, joka pienimmän neliösumman mielessä sopii parhaiten tähän pistejoukkoon. Vihje: Käytä ratkaisun jossain vaiheessa tulosta

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 2 & \frac{3}{2} & -4 \\ -7 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

4. a) Määritä matriisin A ominaisarvot ja ominaisavaruudet.

b) Määritä diagonalisoimalla, mitä matriisia A^n lähestyy, kun $n \rightarrow \infty$.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

MAT-01220 Insinöörimatematiikka B2, kaavoja

$$1. \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

$$2. \quad \cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

$$3. \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$4. \quad \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \right) \mathbf{u}$$

$$5. \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$$

$$6. \quad \mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

$$7. \quad (AB)^T = B^T A^T, (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$8. \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$9. \quad \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

$$10. \quad A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \det(A - \lambda I) = 0$$

$$11. \quad S^{-1}AS = D \Leftrightarrow A = SDS^{-1}$$

$$12. \quad A^T A \bar{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$$