

Vastaa **jokaiseen kysymykseen** ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tehtävässä 2 riittää pelkkä vastaus. Tentissä **ei saa käyttää** muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta. Kirjoita **kaikkiin papereihin selkeästi** nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi. Muistathan antaa palautetta Kaiku-järjestelmän kautta saadaksesi opintosuorituksen. **Kaavat kääntöpuolella.**

Ratkaise **tehtävät 1 ja 2 omalle** paperilleen ja **tehtävät 3 ja 4 omalle** paperilleen.

1. Tarkastellaan matriiseja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

- (a) Laske, jos mahdollista, $2AB$ ja $3BA$.
 - (b) Laske, jos mahdollista, A^{-1} .
 - (c) Laske, jos mahdollista, $\det(A)$.
2. Vastaa lyhyesti (a)-(f) kohtien kysymyksiin. Jokaisen kohdan **oikeasta vastauksesta saat yhden pisteen, väärästä vastauksesta vähennetään puoli pistettä** ja vastaamatta jättäminen on nolla pistettä. Tehtävän kokonaispistemäärä ei kuitenkaan mene negatiiviseksi.

Tarkastellaan 4×4 -matriisia A , jolle $\text{rank}(A) = 3$.

- (a) Onko matriisi A kääntyvä?
 - (b) Mikä on matriisin A sarakeavaruuden dimensio $\dim(R(A))$?
 - (c) Kuinka monta ratkaisua matriisiyhtälöllä $Ax = 0$ on?
 - (d) Laske $\det(AB)$, kun B on 4×4 -matriisi.
 - (e) Ovatko matriisin A sarakkeet lineaarisesti riippuvia?
 - (f) Onko $\text{rref}(A) = I$?
3. Määritä Gaussin eliminointimenetelmää (muodosta yhtälöryhmä ja siitä kokonaismatriisi ...) käyttäen vakiot c ja d , niin että kolme $\mathbb{R}^3$ tasoa $x + 2y + z = 0$, $x + y = 0$ ja $-y + cz = d$.
- (a) Leikkaavat täsmälleen yhdessä pisteessä. Esitä leikkauspiste.
 - (b) Leikkaavat täsmälleen yhdellä suoralla. Esitä suoran yhtälö.
 - (c) Eivät leikkaa missään pisteessä.

4. (a) Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. Etsi matriisin A ominaisarvot.

(b) Tarkastellaan matriisia $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, jonka eräs ominaisarvo on -1 . Etsi ominaisarvoa -1 vastaava ominaisavaruus.

- (c) Esitä matriisi C tulona PDP^{-1} , missä D on diagonaalimatriisi, kun matriisin C ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ ja ominaisarvoja vastaavat ominaisavaruudet ovat

$$E_1 = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ ja } E_{-2} = \text{span} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Insinöörimatematiikka 2
Kaavakokoelma

1. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$
2. $\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$
3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$
4. $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \right) \mathbf{u}$
5. $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$
6. $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$
7. $(AB)^T = B^T A^T, (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
8. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
9. $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$
10. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \det(A - \lambda I) = 0$
11. $V^{-1}AV = D \Leftrightarrow A = VDV^{-1}$
12. $A^T A \bar{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$