



MAT-01200 Insinöörimatematiikka X2

Tentti 19.5.2015 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta

1. a) Olkoon $\mathbf{u} = [-1, 2, 1]^T$ ja $\mathbf{v} = [2, 3, -1]^T$. Laske

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \quad \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}.$$

- b) Määritä yhtälö muodossa $ax + by + cz + d = 0$ sellaiselle tasolle, että piste $(-1, 2, 1)$ sekä kaikki suoran $\mathbf{x} = [1, 1, -2] + t[1, 1, -1]$ pisteet ovat tason pisteitä.

2. Matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

- Määritä a) matriisin A alkio $(2,4)$, b) matriisin B^T alkio $(2,3)$, c) matriisin $A + B$ alkio $(3,3)$, d) matriisin AB alkio $(4,3)$, e) $\det(A)$, f) matriisin A^{-1} alkio $(1,3)$.

3. Matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Ovatko matriisin A sarakkeet lineaarisesti riippuvat vai riippumattomat? Perustele!
- Matriisin A sarakkeet $\mathbf{a}_i$ virittävät joukon W . Mitkä sarakkeet voidaan jättää pois virittäjien joukosta ilman, että joukko W muuttuu? Jätä mahdollisimman monta pois.
- Mikä on matriisin A nolla-avaruuden kanta?

4. Olkoot

$$A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriisin A ominaisarvot ovat $1/3$, $2/3$ ja 1 ja ominaisvektorit ovat $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ja $\mathbf{v}_3$. Mikä ominaisarvoista vastaa kutakin ominaisvektoria? Matriisi A on selvästi diagonalisoituva. Määritä sellainen ortogonaalinen matriisi Q ja diagonaalimatriisi D , että $A = QDQ^T$.

Tentissä saattaa olla apua seuraavista (tai sitten ei)

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i - \left(\frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_{i-1}}{\|\mathbf{v}_{i-1}\|^2} \mathbf{v}_{i-1} \right)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$$