

MAT-01110 Insinöörimatematiikka A1 (Martti Lehto)

Tentti 19.10.2016

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja eikä laskinta!

1. Implikaation $p \rightarrow q$ yhteydessä sanottiin, että p on riittävä ehto q :lle ja q on välttämätön ehto p :lle.

a) Onko $x = 1$ (i) välttämätön ehto, (ii) riittävä ehto sille, että $|x| \leq 2$? Perustele!

b) Onko $|x| \leq 2$ (i) välttämätön ehto, (ii) riittävä ehto sille, että $x = 1$? Perustele!

2. a)(1 piste) Derivoi $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \sqrt{2x}$

b)(1 piste) Derivoi $h(x) = \frac{1}{x^2 + x^{-3}}$

c)(2 pistettä) Derivoi $f(x) = e^{-\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2}$.

d)(2 pistettä) Perustele derivaatan avulla, milloin c)-kohdan $f(x)$ on kasvava funktio.

3. Olkoon $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x+4} & , \text{ jos } x \geq 0 \\ ax+2 & , \text{ jos } x < 0 \end{cases}$.

a) Onko f jatkuva kaikilla x :n arvoilla? Perustele.

b) Määrää erotusosamäärien raja-arvoja käyttäen vakiolle a sellainen arvo, että f on derivoituva pisteessä $x = 0$. (Sinun on siis laskettava, millä a :n arvolla vasemman ja oikeanpuoleinen derivaatta ovat yhtäsuuret.)

(Vihje: $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tai $\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$)

4. a) Etsi kompleksiluku $z = x + jy$, jonka reaaliosa x ja imaginaariosa y toteuttavat yhtälön

$$\frac{2+x-jy}{3x+jy} = 1+j2.$$

(Vihje: Kaksi kompleksilukua ovat yhtäsuuret, jos niiden reaaliosat keskenään ja imaginaariosat keskenään ovat yhtäsuuret.)

b) Esitä kompleksiluvun $z = \frac{1}{4} - j\frac{3}{4}$ käänteisluku z^{-1} summamuodossa $a+jb$ ja laske sitten kummankin itseisarvot eli modulit. Kumpi on suurempi? (Vertailu onnistuu ilman laskinta.)

Kaavakokoelma kääntöpuolella!



Insinöörimatematiikka A 1

Tentin kaavaliite

1. Derivointikaavoja

$f(x)$	$f'(x)$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{ar sinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{ar cosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{ar tanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

$$2. D_y f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (y = f(x))$$

$$3. \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$4. \operatorname{ar sinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{ar cosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$\operatorname{ar tanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$5. \sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$$
$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$$

$$6. e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$