

## Kirjallinen tentti

Tentin laatijat: Jari Kangas, Antero Marjamäki

Tentissä käytettävä laskin ei saa sisältää seuraavia toimintoja: (i) ohjelmoitavuus, (ii) tekstin tallennus.

**Tehtävä 1:** Tarkastele alla olevia väitteitä ja perustele ovatko ne totta vai ei.

- (a) Jos  $\int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = 0$  niin tilavuudessa  $V$  ei ole varauksia.
- (b) Amperèn laki voidaan esittää vektoripotentiaalin avulla muodossa  $\nabla \times \mu \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}$ .
- (c) Kenttä  $\mathbf{E}(x, y, z) = 6y\mathbf{u}_x + 6x\mathbf{u}_y + 3z\mathbf{u}_z$  toteuttaa sähköstatiikan lainalaisuudet (voit olettaa materiaaliparametrit vakioiluvuiksi).
- (d) Pistevarauksen  $q_1$  aiheuttama voima pistevaraukseen  $q_2$  saadaan lausekkeella

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3},$$

missä  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  kuvaa siirtymävektoria pistevarauksesta 2 pistevaraukseen 1.

(Yht. 20 p.)

**Tehtävä 2:** Kuvissa 1–4 on tietoja sähköstaattisesta simulointitehtävästä. Tehtävän rakenteen paksuus 10 cm, eristeen mitat ovat 40 cm  $\times$  10 cm sekä  $\epsilon_r^{\text{eriste}} = 8$ . Eristeeseen on liitetty johteesta tehdyt terminaalit, rakenteen ympärillä on ilma-alue ( $\sigma = 0, \epsilon_r = 1, \mu_r = 1$ ).

Kuvassa 1 näkyy rakenteen terminaalit ja niiden välinen eriste. Kuvassa 2 sähköisen skalaari-potentiaalin tasa-arvopintoja.

Kuvassa 3 on nk. leikkaussuora, jolla on tarkasteltu  $E_x$ -komponenttia, kts. kuva 4. Lisäksi tiedetään  $E_x$ -komponentin keskimääräinen arvo ko. leikkausviivalla:  $E_x^{\text{ave}} = -15$  V/m.

- (a) Määritä piirianalyysistä tutulla lausekkeella rakenteen kapasitanssi.
- (b) Määritä levyjen välinen jännite.
- (c) Määritä rakenteen kapasitanssi, kun simuloinneista saatu sähkökentän energia  $W_E = 46.2$  pJ. Vertaa sitä (a)-kohdan kapasitanssiarvoon, mitä huomaat?
- (d) Määritä  $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{P}$  -kentät origossa.
- (e) Luonnostelee  $\mathbf{D}$ -kenttä eristeessä ja ilma-alueessa.
- (f) Hyödynnä em. kuvien tuloksia ja arvioi levyillä olevaa varausta. Mikä on tämän perusteella rakenteen kapasitanssi, miten tämä vertautuu (c)-kohdan tulokseen?

Opastus: Pyri yksinkertaistamaan tehtävän integraaleja (kuten kurssin aikana olemme monesti tehneet) annettujen tietojen perusteella; esimerkiksi pintaintegraaleja olemme yksinkertaistaneet muotoon  $X \times A_S$ , missä  $X$  on tieto/arvio integroitavan funktion keskiarvosta ja  $A_S$  integroitavan alueen pinta-ala.

(Yht. 40 p.)

**Tehtävä 3:** Tehtävässä tarkastellaan kahta silmukkaa ja niihin indusoituvia sähkömotorisia voimia.

Magneettivuon tiheys voidaan olettaa tunnetuksi

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 4.5 \sin(400t)\mathbf{u}_x + 1.55 \cos(600t)\mathbf{u}_y + 2.5 \cos(900t)\mathbf{u}_z \text{ mT.}$$

Silmukoista tiedetään

- A Johtava suorakulmion muotoinen silmukka, jonka nurkkapisteet ovat (1,0,4); (1,4,4); (3,4,4); and (3,0,4) [m],
  - B Johtava suorakulmion muotoinen silmukka, jonka nurkkapisteet ovat (-1,-2,2); (-1,2,2); (-1,2,3); and (-1,-2,3) [m].
- (a) Kirjaa ensiksi sähkömagnetiikan lainalaisuudet, joita tehtävän ratkaisemisessa tarvitaan.
  - (b) Määritä arviot indusoituneista sähkömotorisista voimista ja niiden perusteella kumpaan silmukkaan indusoituu pienempi sähkömotorinen voima.
  - (c) Tarkastele silmukkaa, johon indusoituu pienempi sähkömotorinen voima: määritä siihen indusoituva virta, mikäli silmukan resistanssi on  $R = 0.2 \Omega$ .

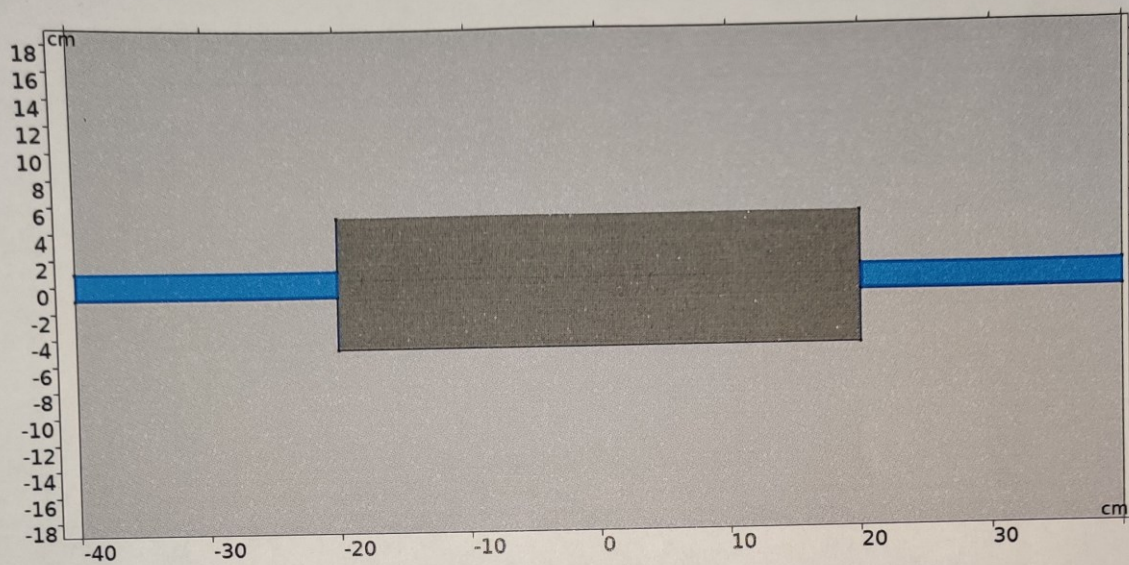
(Yht. 20 p.)

**Tehtävä 4:** Tarkastellaan  $xy$ -tasossa magnetostaattista tapausta, jossa on magnetoituvaa materiaalia tyhjiössä. Suhteellinen permeabiliteetti  $\mu_r = 10$  ja magneettivuon tiheys  $\mathbf{B} = 2\mathbf{u}_x - 3\mathbf{u}_y$  T ovat tunnetut magnetoituvassa materiaalissa, jota rajaa viiva (taso)  $y - 2x + 4 \leq 0$ . Loppuosa tarkastelualueesta on tyhjiötä.

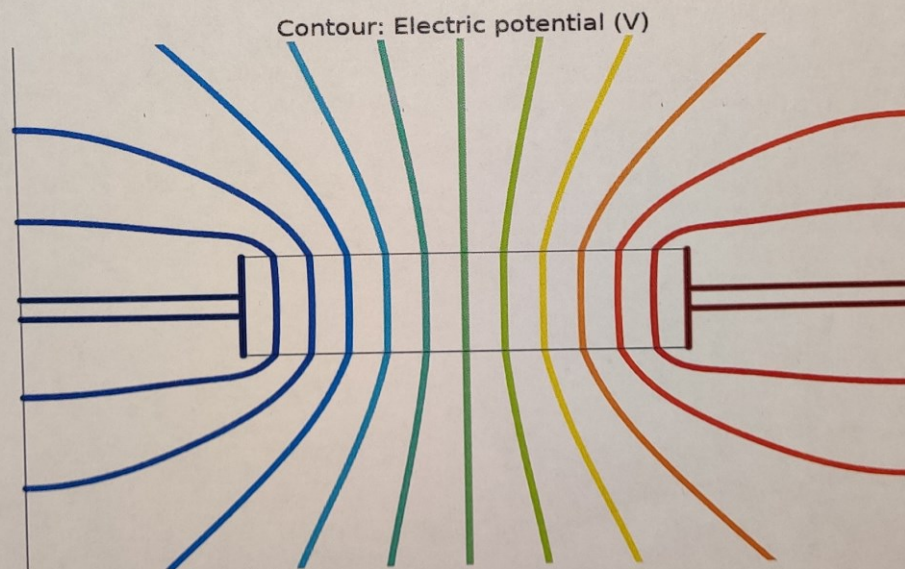
- (a) Piirrä materiaalirajapinta  $xy$ -tasoon ja määritä rajapinnan normaali.
- (b) Määritä magnetoituma magnetoituvassa materiaalissa.
- (c) Määritä  $\mathbf{B}$  tyhjiössä.

(Yht. 20 p.)

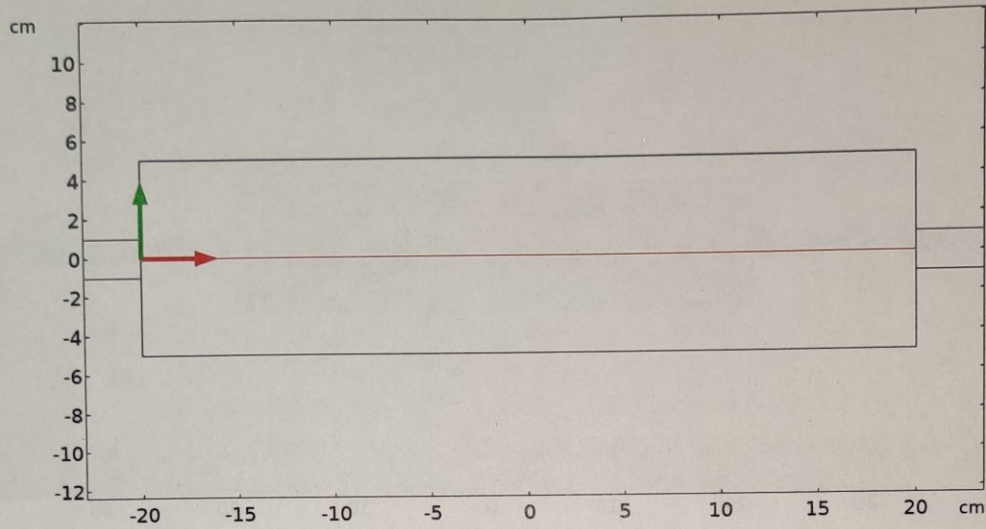
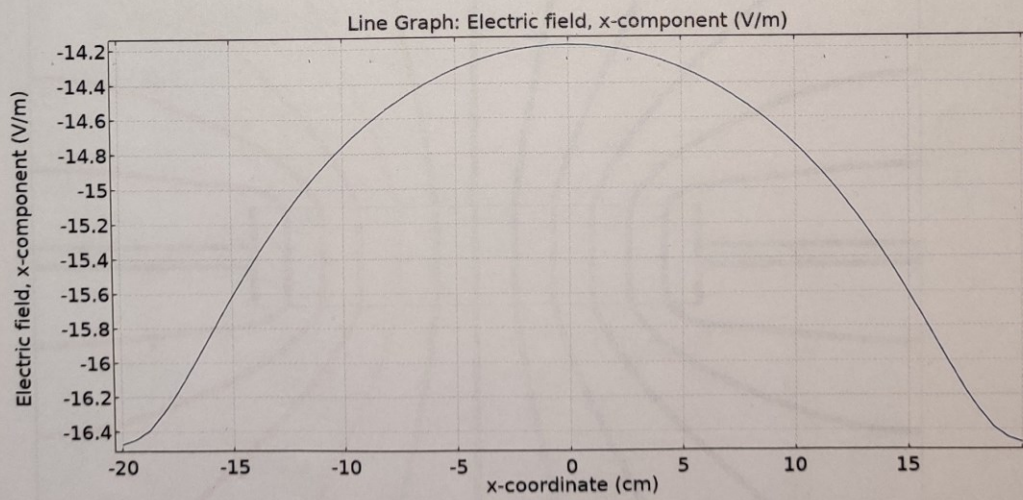




Kuva 1: Terminaalit sinisellä ja eriste tummennettuna.



Kuva 2: Sähköinen skalaaripotentiali.

Kuva 3: Leikkaussuora, päätepisteet ovat  $(-20, 0, 0)$  cm ja  $(20, 0, 0)$  cm.Kuva 4:  $E_x$  leikkaussuoralla  $(-20, 0, 0)$  cm  $\rightarrow$   $(20, 0, 0)$  cm. Kts kuva 3 .